



TECHNIEK  
EN MANAGEMENT

# Warmtetransport en thermische isolatie

## Deel II Niet-stationair warmtetransport

Docent ir. E.R. van den Ham

Gebaseerd op collegendiktaat CT3220 TU Delft

Auteurs:

Ir. A.C. van der Linden

Prof. ir. J.J.M. Cauberg

Ir. E.R. van den Ham

# 1. NIET-STATIONAIR WARMTETRANSPORT IN EEN WAND

## 1.1. Inleiding.

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot een stationair warmte- en vochttransport door wanden. De zonbelasting en de buitenluchttemperatuur fluctueren in de tijd, zodat het temperatuurverloop in buitenwanden, daken en wegconstructies niet stationair zal zijn. Ook de binnenluchttemperatuur van een ruimte zal om dezelfde redenen niet constant zijn in de tijd, waarmee ook het temperatuurverloop in binnenwanden tijdafhankelijk is.

Het instationaire 1-dimensionale warmtetransport in een eindige wand wordt beschreven met de uitdrukking (1.2b) :  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

Hierbij is  $a$  de temperatuurvereffeningscoëfficiënt, zie 1.3

Voor de volledige oplossing van deze partiële, 2<sup>e</sup>-orde differentiaalvergelijking zijn twee randvoorwaarden in de plaats en een beginvoorwaarde in de tijd vereist.

Voor sommige gevallen kan een gesloten analytische oplossing worden gevonden. In het algemeen echter is de analytische oplossing zo complex, dat tot een numerieke benadering wordt overgegaan. Om inzicht te verkrijgen in het fysische proces van het warmtetransport in een materiaal worden enkele eenvoudige gevallen beschouwd.

Behandeld zullen worden de warmte-indringing in een zo dikke wand dat deze als een halfoneindig medium kan worden opgevat, zodat op de oneindig grote diepte de verandering van de temperatuur verwaarloosd mag worden. Als belastingen worden de temperatuur aan het oppervlak of de luchttemperatuur voorgeschreven. Aan de orde komen een sprongvormig en een periodiek verloopende temperatuur.

## 1.2. Sprongvormig voorgeschreven oppervlaktetemperatuur.

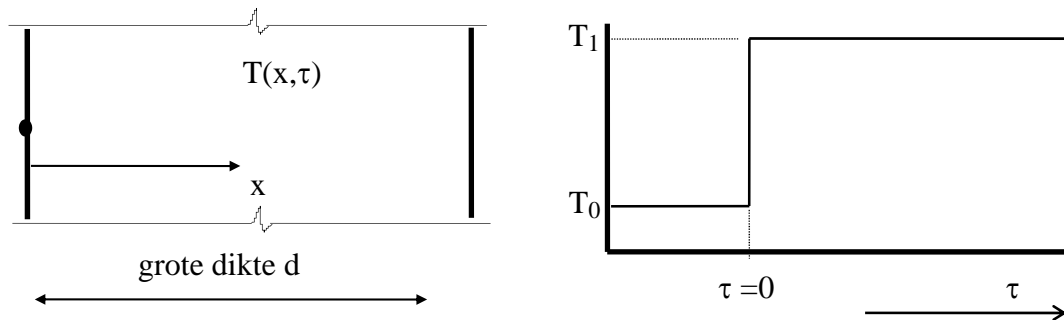


fig. 1.1. Temperatuuropvang bij een dikke wand

Praktische voorbeelden van een opgedrukte temperatuursprong zijn :

- Een vrij opgestelde, betonnen schoorsteen, die wordt getroffen door een plotseling opkomende regenbui, die lang aanhoudt.
- Temperatuurbelasting op een wand of een kolom bij brand.
- Het neerzetten van een warme voet op een koude badkamervloer.

De differentiaalvergelijking, die het proces in figuur 4.1 beschrijft, luidt :

$$\frac{\partial T_w}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

beginvoorwaarde :  $\tau = 0$  en  $x \geq 0$  :  $T_w(x, 0) = T_0$

randvoorwaarden :  $\tau > 0$  en  $x = 0$  :  $T_w(0, \tau) = T_1$

$$\tau > 0 \text{ en } x = \infty : T_w(\infty, \tau) = T_0$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking is (zie appendix A):

$$T(x, \tau) = T_1 + (T_0 - T_1) \cdot C \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta=0}^{\beta=\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta \quad \text{met } \beta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \quad (1.2a)$$

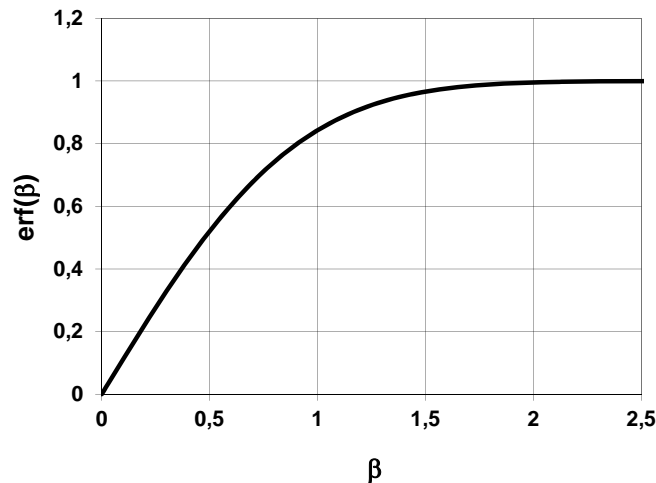


fig. 4.2 Errorfunctie

Hierin stelt  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta=0}^{\beta=\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta = \text{erf}(\beta)$  de foutenintegraal of errorfunctie voor, zie figuur 1.2 (die op veel plaatsen is getabelleerd), zodat:

$$T_w(x, \tau) = T_1 + (T_0 - T_1) \cdot \text{erf}(\beta) \quad (1.2b)$$

Wanneer  $T_0 = 0$  wordt gesteld, is de temperatuursprong  $\Delta T$  en wordt (1.2b) :

$$T(x, \tau) = \Delta T(1 - \text{erf}(\beta)) \quad (1.3)$$

Voorbeeld: Betonnen wand

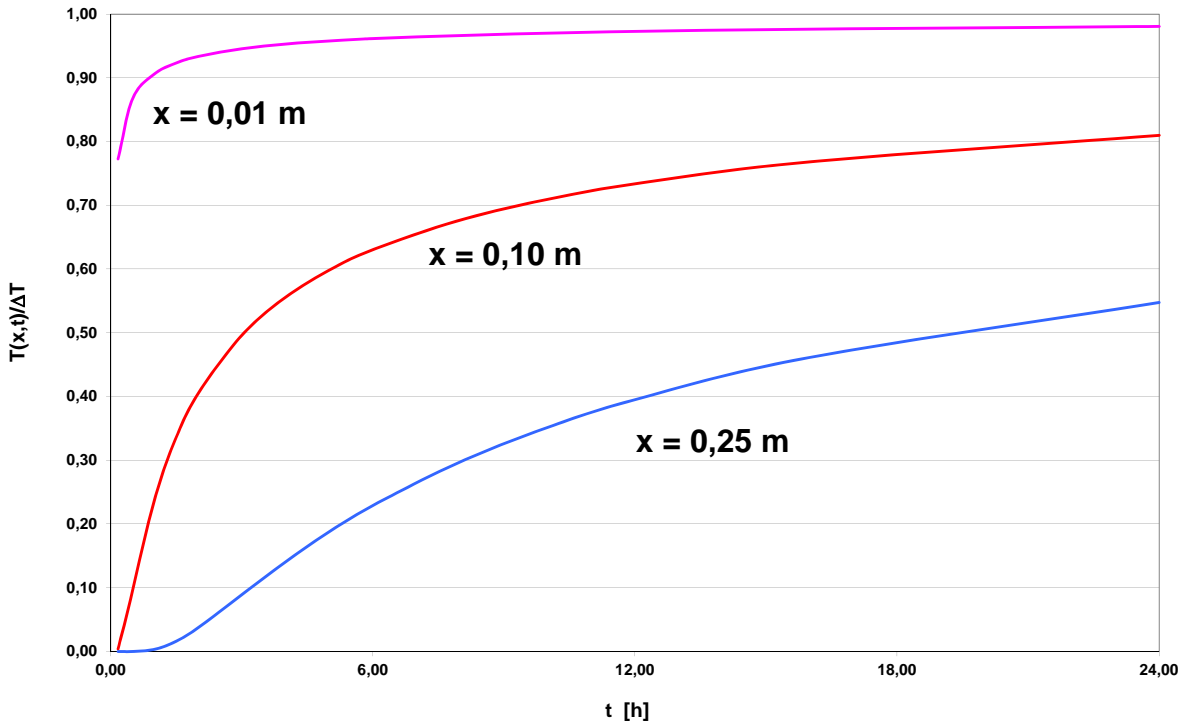
$$\text{Voor beton met } a = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{2}{2000 \cdot 1000} = 10^{-6} \text{ is } \beta = \frac{x}{2 \cdot 10^{-3} \sqrt{\tau}}.$$

In tabel 1.1 is op verschillende plaatsen en tijdstippen het temperatuurverloop gegeven, waaruit blijkt dat op 400 mm diepte de invloed van de temperatuursprong pas na 4 uur merkbaar is.

In figuur 1.3 wordt het temperatuurverloop in de tijd op een diepte van  $x = 80$  mm getoond. Figuur 1.4 geeft het temperatuurverloop op verschillende tijdstippen

Tabel 1.1 Temperatuur op enkele plaatsen bij temperatuursprong op de rand van betonnen wand

x [m]	$\tau = 0$ h	$\tau = 1$ h	$\tau = 4$ h
0,02	0	0,81 $T_1$	0,91 $T_1$



0,08	0	0,34 T <sub>1</sub>	0,63 T <sub>1</sub>
0,14	0	0,10 T <sub>1</sub>	0,41 T <sub>1</sub>
0,40	0	0,00 T <sub>1</sub>	0,01 T <sub>1</sub>

fig. 1.3 Temperatuurverloop in de tijd op verschillende diepten  $x$  bij sprong aan de rand

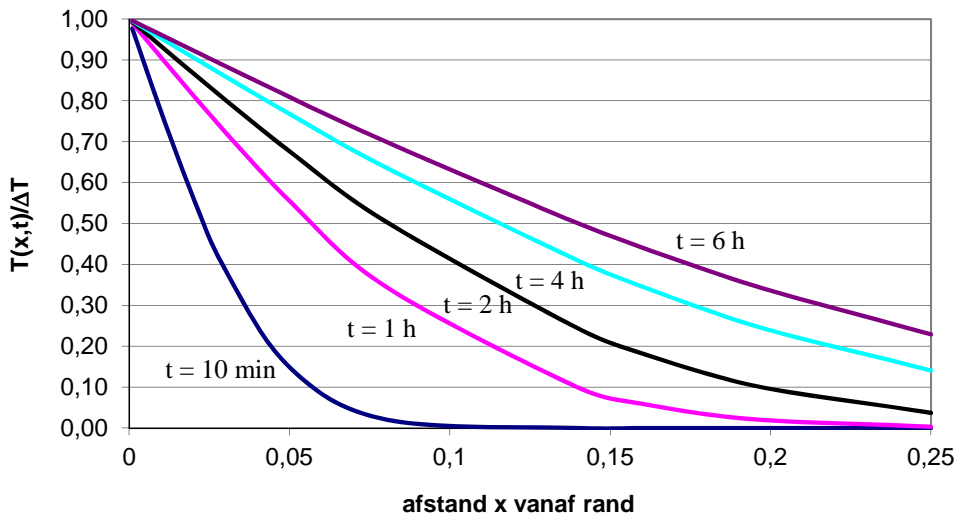


fig. 1.4 Temperatuurverloop in de wand op verschillende tijdstippen

Wanneer als criterium voor een nog te verwaarlozen temperatuurverandering gesteld wordt dat  $\text{erf}(\beta) \geq 0,95$  moet zijn, volgt hieruit dat  $\beta \geq 1,385$ , dat wil zeggen:

$$\frac{d}{2\sqrt{a\tau}} \geq 1,385 \quad (1.4)$$

Dit is te realiseren voor grote dikten  $d$  (dikke wanden) of kleine  $\tau$  (korte tijden).  
 Wanneer voor deze gevallen aan (1.4) wordt voldaan, mag de gevolgde rekenwijze dus ook worden toegepast op constructies met eindige afmetingen.  
 Vergelijking (1.4) kan ook omgewerkt worden tot :

$$\tau \leq \frac{d^2}{7,67a} \quad (1.4a)$$

Passen we dit toe op beton met een temperatuurvereffeningscoëfficiënt  $a = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 0,0036 \text{ m}^2/\text{h}$  , dan wordt gevonden :  $\tau \leq 36 \text{ d}^2$  .

Voor een betonwand van 200 mm zou het dus circa 1,5 uur duren, voordat de achterkant reageert op een temperatuursprong aan de voorzijde. Bij een 2 maal zo dikke wand duurt het 4 keer zo lang.

Met behulp van formule (1.2b) is ook eenvoudig te berekenen hoe groot de warmtestroomdichtheid is aan het oppervlak op  $x = 0$ .

Voor de warmtestroomdichtheid kan men schrijven:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\lambda(T_0 - T_1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta^2}}{2\sqrt{a\tau}} \quad \text{of} \quad (1.5a)$$

$$q_x = \frac{\lambda(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi a \tau}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a\tau}} \quad [\text{W} / \text{m}^2]$$

Voor de warmtestroomdichtheid aan het oppervlak ( $x = 0$ ) wordt dan gevonden:

$$q_0 = \frac{\lambda(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi a \tau}} = \frac{\sqrt{\lambda \rho c}}{\sqrt{\pi \tau}} \cdot (T_1 - T_0) \quad [\text{W} / \text{m}^2] \quad (1.5b)$$

Na lange tijd ( $\tau \rightarrow \infty$ ) nadert  $q_0 \rightarrow 0$ .

$\sqrt{\lambda \rho c}$  wordt de contact- of indringcoëfficiënt genoemd, waarvoor de letter  $b$  als symbool is ingevoerd.

Integratie in de tijd van uitdrukking (1.5a) levert de totaal opgenomen warmte  $Q$  in  $\text{J}/\text{m}^2$  door het materiaal :

$$Q = \int_0^\tau q_0 d\tau = \frac{2\sqrt{\lambda \rho c \tau}}{\sqrt{\pi}} (T_1 - T_0) \quad (1.6)$$

### 1.2.1 Willekeurig temperatuurverloop

Een willekeurig temperatuurverloop kan eenvoudig worden geschematiseerd door een aantal opeenvolgende temperatuursprongen, zie figuur 1.5

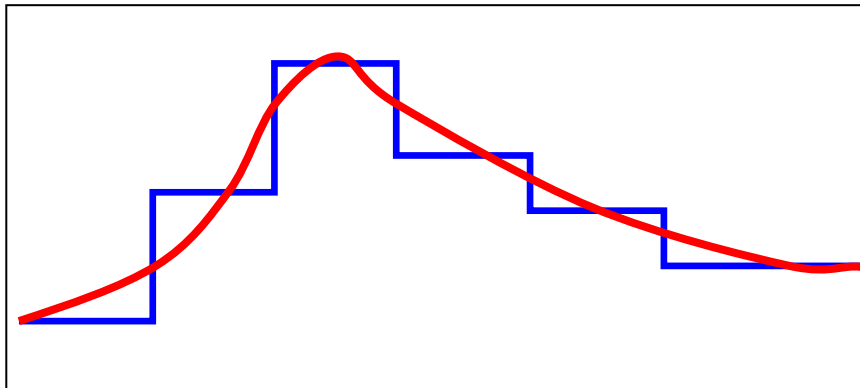


fig. 1.5 Willekeurig temperatuurverloop geschematiseerd als opeenvolgende temperatuursprongen

Als voorbeeld wordt hier een kortstondige temperatuursprong uitgewerkt. Hierbij kan worden gedacht aan een wand, die tijdelijk door de zon wordt beschenen.

Een kortstondige sprong in de temperatuur kan worden geschematiseerd door het superponeren van twee langdurige temperatuursprongen, zie figuur 1.6

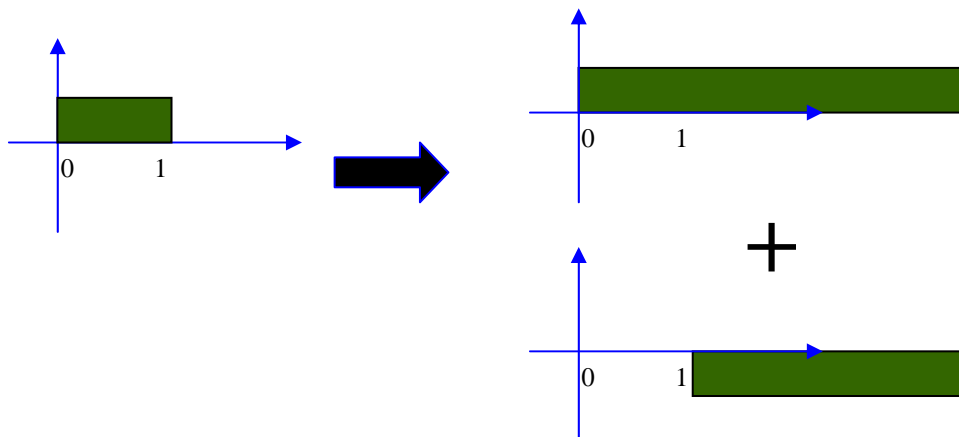


fig. 1.6 Kortstondige temperatuursprong als optelling van twee langdurige temperatuursprongen

Kortstondige temperatuursprong  
vanaf  $t = 0$  h :

$$T(x, t) = \Delta T \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right)$$

vanaf  $t = 1$  h :

$$T(x, t) = -\Delta T \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-1)}} \right) \right)$$

Superponeren van deze twee temperatuursprongen leidt tot:

van  $t = 0$  h tot  $t = 1$  h :

$$T(x, t) = \Delta T \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right)$$

vanaf  $t = 1$  h :

$$T(x, t) = \Delta T \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a(t-1)}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right)$$

In figuur 1.7 is het temperatuurverloop in de tijd op verschillende diepten weergegeven.

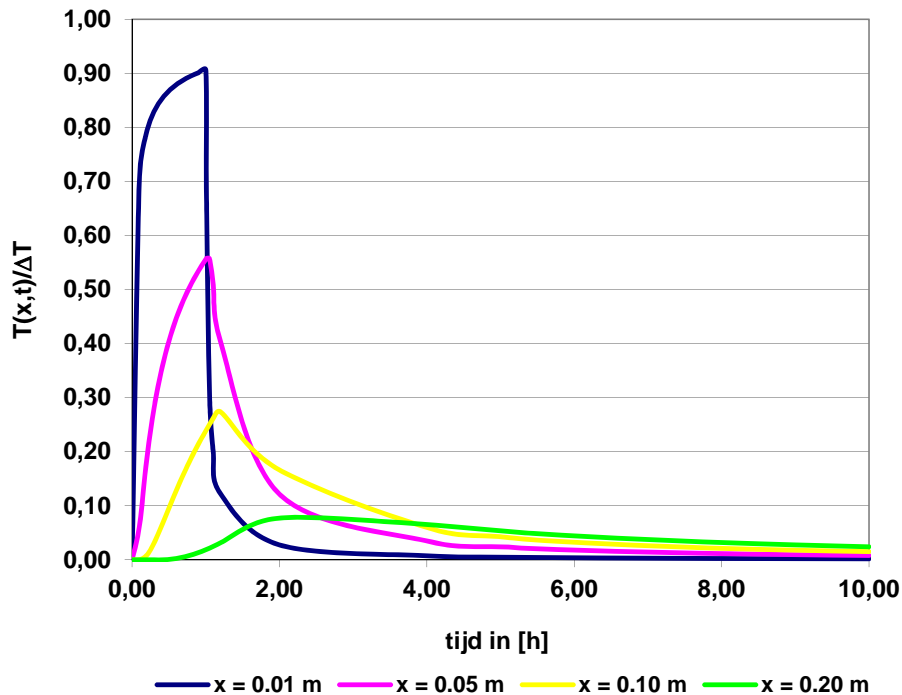


fig. 1.7

### 1.3. Sprongvormig voorgeschreven luchttemperatuur.

De relatief eenvoudige analytische oplossing in het voorgaande geldt voor een voorgeschreven oppervlaktetemperatuur. Wanneer de constructie aan lucht grenst en we de luchttemperatuur voorschrijven, wordt de oplossing complexer en minder eenvoudig te doorzien. Tussen luchttemperatuur en oppervlaktetemperatuur is nu een warmteoverdrachtscoëfficiënt aanwezig. Indien de begintemperatuur in het materiaal overal gelijk aan 0 wordt gesteld, luidt de oplossing :

$$T(x, \tau) = T_1 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right) - e^{h \cdot x + h^2 \cdot a\tau} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + h\sqrt{a\tau} \right) \right\} \right] \quad (1.7)$$

met :  $h = \frac{\alpha_c}{\lambda}$

Voor de afleiding van de oplossing wordt verwezen naar de literatuur (Carslaw, 1959). De warmtestroomdichtheid aan het oppervlak is gelijk aan :

$$q_{w0} = \alpha_c (T_1 - T_{w0}) = \alpha_c e^{h^2 a\tau} \cdot T_1 \left\{ 1 - \operatorname{erf} (h\sqrt{a\tau}) \right\} \quad (1.8)$$

Na integratie in de tijd van (1.8) kan de door het materiaal opgenomen warmte kan worden berekend (zie appendix B), zodat :

$$Q = \int_0^{\tau} q_{w0} d\tau = \int_0^{\tau} \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 d\tau - \int_0^{\tau} \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) d\tau \quad (1.9)$$

In figuur 4.3 worden de temperatuur op 80 mm diepte en de totaal opgenomen hoeveelheid warmte door het materiaal in  $\text{J/m}^2$  weergegeven voor een sprongvormige voorgeschreven oppervlaktetemperatuur en een sprongvormig voorgeschreven luchttemperatuur.

De waarden zijn uitgedrukt in de grootte van de aangebrachte sprong.

Voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt tussen lucht- en oppervlaktetemperatuur is gekozen  $\alpha_c = 8 \text{ SI}$  en is weer uitgegaan van dezelfde betonconstructie van tabel 1.1.

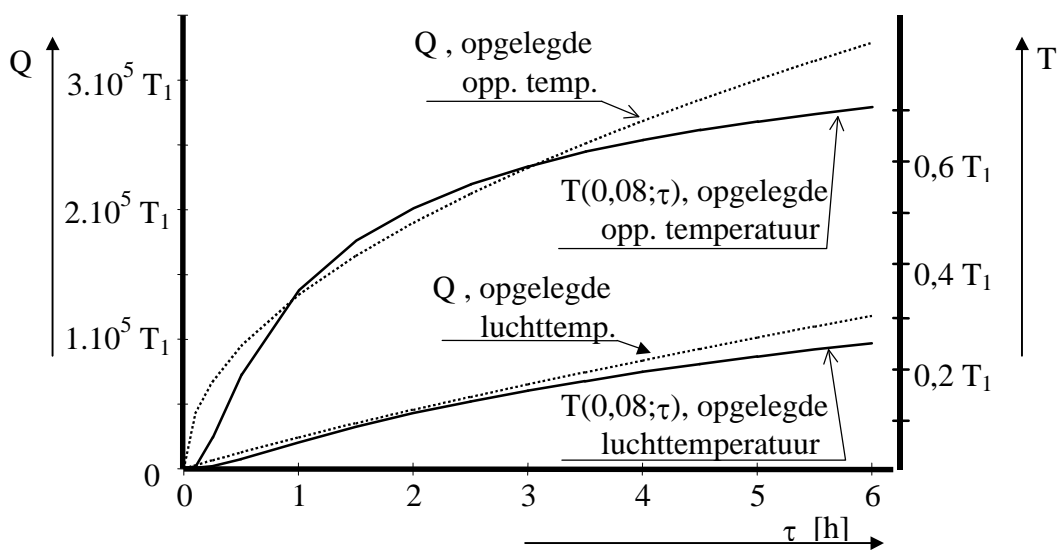


fig. 1.8. Vergelijking van temperatuurverloop op  $x = 0,08$  bij sprong aan de rand of de luchttemperatuur

De temperatuur op een zekere diepte bereikt bij een voorgeschreven oppervlaktetemperatuur sneller een grote waarde dan bij een voorgeschreven luchttemperatuur. Deze snelheid is afhankelijk van de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $\alpha_c$ . Dit geldt ook voor de in een zekere tijd totaal opgenomen warmte door het materiaal  $Q$ .

Als de warmteoverdrachtscoëfficiënt oneindig groot is, zijn beide gevallen identiek.

#### 1.4. Meewerkende dikte bij sprongvormig verlopente temperatuurbelasting.

In hoofdstuk 2 zullen eenvoudige modellen worden behandeld, die het opwarmgedrag van verwarmde ruimten beschrijven. Om de warmtecapaciteit van de wanden mee te nemen wordt dan een zogenaamde 'meewerkende' dikte  $d_{mw}$  in rekening gebracht. Deze meewerkende dikte is gedefinieerd als die dikte van een fictief materiaal met een oneindig grote warmtegeleidingscoëfficiënt zodanig dat de opgenomen warmtehoeveelheid gelijk is aan de opgenomen warmtehoeveelheid van het werkelijke materiaal onder gelijke omstandigheden.

De oneindig grote warmtegeleidingscoëfficiënt heeft tot gevolg dat overal in het fictieve materiaal de temperatuur gelijk is aan de oppervlaktetemperatuur  $T_{w0}$ .

Een wand in een ruimte krijgt behalve convectieve warmte afkomstig van de lucht ook nog stralingswarmte van de vaste omgeving met  $T_{omg}$ .

De door het fictieve materiaal opgenomen hoeveelheid warmte  $\rho c d_{mw} \frac{\partial T_{w0}}{\partial \tau}$  is dus gelijk aan de hoeveelheid warmte  $\alpha_c (T_1 - T_{w0}) + \alpha_s (T_{omg} - T_{w0})$  die het oppervlak van de luchttemperatuur en



de vaste omgeving krijgt. Wanneer wordt aangenomen dat de temperatuur van de vaste omgeving gelijk is aan de luchttemperatuur is :  $\alpha_c + \alpha_s = \alpha_i$ , zodat de differentiaalvergelijking wordt :

$$\rho c d_{mw} \frac{dT_{w0}}{d\tau} = \alpha_i (T_i - T_{w0}) \quad (1.10)$$

Integratie levert de oplossing :

$$T_{w0} = T_i \left( 1 - e^{-\frac{\alpha_i}{\rho c d_{mw}} \tau} \right) \quad (1.11a)$$

De opgenomen warmte per tijdseenheid is gelijk aan de warmtestroomdichtheid aan het oppervlak en is dus gelijk aan  $\alpha_i (T_i - T_{w0})$  of ook gelijk aan  $\rho c d_{mw} \frac{\partial T_{w0}}{\partial \tau}$ .

Na differentiatie van (1.11a) naar de tijd  $\tau$  krijgen we voor de warmtestroomdichtheid  $q_{w0}$  :

$$q_{w0} = \alpha_i T_i e^{-\frac{\alpha_i}{\rho c d_{mw}} \tau} \quad (1.11b)$$

Door te eisen dat de met (1.11b) berekende warmtestroomdichtheid gelijk is aan de werkelijke optredende warmtestroomdichtheid (4.8) kan de meewerkende dikte worden bepaald.

In de nu volgende tabel 1.2 is dit gedaan, waarbij  $\alpha_i = 8$  SI groot is.

Tabel 1.2 Vergelijking van twee berekeningswijzen voor een wand met opgelegde luchttemperatuurfunctie

$\tau$ [h]	Werkelijk optredend		Meewerkende dikte	
	$T_0$ (6.7)	$q_{w0}$ (6.8)	$d_{mw}$ [mm] m.b.v (6.11b)	$d_{mw}^*$ [mm] m.b.v (6.12)
1	0,22 $T_i$	6,21 $T_i$	57	13
2	0,29 $T_i$	5,66 $T_i$	85	25
3	0,34 $T_i$	5,29 $T_i$	105	36
4	0,37 $T_i$	5,01 $T_i$	125	46
5	0,40 $T_i$	4,78 $T_i$	140	56
6	0,43 $T_i$	4,59 $T_i$	155	67

Wanneer de temperatuur van het fictieve materiaal gelijk genomen wordt aan de luchttemperatuur  $T_i$ , moet de in tabel 1.2 bepaalde meewerkende dikte  $d_{mw}$  gecorrigeerd worden.

$$d_{mw}^* = d_{mw} \frac{T_{w0}}{T_i} = d_{mw} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha_i}{\rho c d_{mw}} \tau} \right) \quad (\text{laatste kolom tabel 1.2}) \quad (1.12)$$

Voor korte tijden wordt volstaan met een over de tijd gemiddelde waarde van de meewerkende dikte.

### 1.5. Praktische consequentie:

1. Bij de beoordeling van de brandwerendheid van een constructie is de temperatuurstijging van het oppervlak een belangrijke maat. Bij brand is de warmte-stroomdichtheid naar de wand heel groot (vanwege de hoge snelheden en warmtestraling, die optreden door de grote temperatuurverschillen) en zal zeker in het begin niet veel veranderen door het grote temperatuurverschil tussen de brand en de oppervlaktetemperatuur van de wand. Dat wil zeggen dat ook  $q_0$  heel groot zal zijn en bijna constant. Formule (1.5) is ook te schrijven als

$$q_0 = \frac{\sqrt{\lambda \rho c}}{\sqrt{\pi \tau}} \cdot (T_1 - T_0) = \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{d} \rho c d}}{\sqrt{\pi \tau}} \Delta T = \frac{\sqrt{\rho c d}}{\sqrt{\pi \tau}} R_c \Delta T$$

$\rho c d$  en  $R_c$  resp. de warmtecapaciteit en de warmteweerstand van de constructie zijn. Als  $q_0$  dus nagenoeg constant is, zal een goed geleidende wand met een grote warmtecapaciteit een relatief kleine temperatuurstijging van de wand tot gevolg hebben bij brand.

2. Bij discontinu verwarmde ruimten wordt de sprongfunctie slechts gedurende korte tijd opgelegd. Dientengevolge zal de warmtestroom naar de wanden groot zijn.
3. Het is bekend dat voorwerpen van verschillend materiaal, ook wanneer zij dezelfde temperatuur hebben, bij aanraken voor het gevoel verschillende temperaturen schijnen te hebben. Dit hangt af van de eerder genoemde contactcoëfficiënt  $b = \sqrt{\lambda \rho c}$ . Wanneer twee materialen met verschillende temperaturen  $T_1$  en  $T_2$  tegen elkaar worden gebracht, kan dit voor elk materiaal afzonderlijk opgevat worden alsof een temperatuursprong wordt opgedrukt op het scheidingsvlak. Het contactvlak zal een temperatuur  $T_c$  aannemen, die tussen  $T_1$  en  $T_2$  ligt, in het begin constant blijft en afhankelijk is van de afzonderlijke contactcoëfficiënten, zie figuur 1.9.

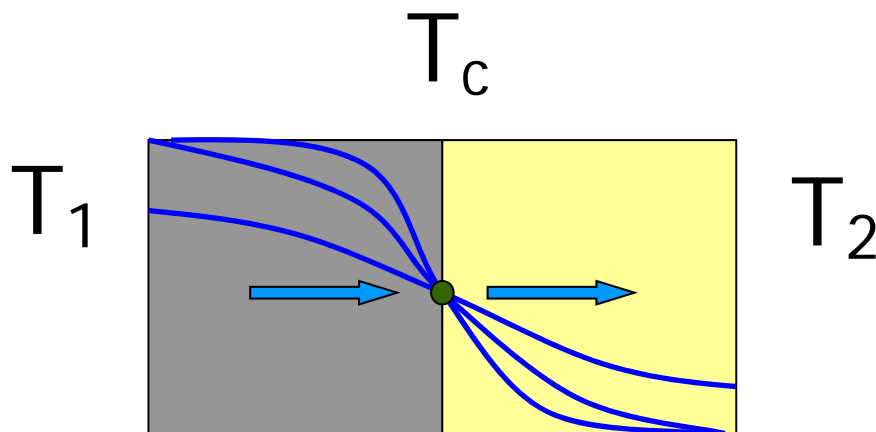


fig. 1.9

Met behulp van (1.5) is dit eenvoudig in te zien. Immers: de warmte die door het contactvlak stroomt en door het lichaam met de hoogste temperatuur wordt afgestaan, zal door het lichaam met de laagste temperatuur worden opgenomen. Met andere woorden:  $q_0$  is voor beide materialen gelijk

$$\text{of: } \frac{\sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1}}{\sqrt{\pi \tau}} (T_1 - T_c) = \frac{\sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_2}}{\sqrt{\pi \tau}} (T_c - T_2)$$

waaruit voor  $T_c$  wordt gevonden:

$$T_c = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2} \quad (1.13)$$

Uit formule (1.13) volgt direct :

- Voor twee materialen van dezelfde samenstelling zal de contacttemperatuur de gemiddelde waarde aannemen van de twee materiaaltemperaturen.
- Voor twee verschillende materialen zal de contacttemperatuur het dichtst gelegen zijn bij de temperatuur van het materiaal, dat de hoogste contactcoëfficiënt heeft.

### 1.6. Periodiek verlopende voorgeschreven oppervlaktetemperatuur.

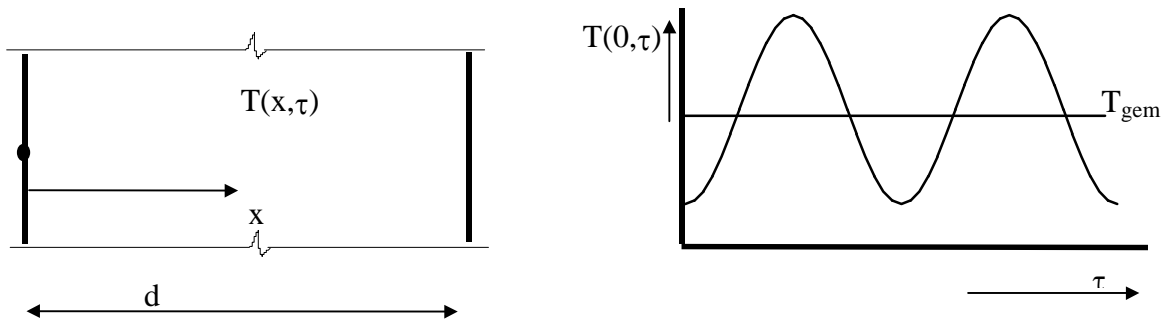


fig. 1.10 Sinusvormige opgelegde randtemperatuur

De differentiaalvergelijking met periodieke randvoorwaarden

$$\frac{\partial T_w}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}$$

beschrijft bijvoorbeeld het temperatuurverloop in de aarde of in een weg ten gevolge van de dagelijkse of jaarlijkse temperatuurschommelingen van de oppervlaktetemperatuur.

Het probleem kan van belang zijn om te kunnen bepalen hoe diep de waterleiding in een bepaald klimaatgebied onder de grond dient te worden aangebracht om in de winter vorstvrij te blijven.

De randvoorwaarden laten zich als volgt formuleren :

$$\text{voor } \tau > 0 \text{ en } x = 0 \rightarrow T_w(0, \tau) = T_{gem} + \hat{T}_0 \cos \omega \tau$$

$$\text{voor } \tau > 0 \text{ en } x = \infty \rightarrow T_w(\infty, \tau) = T_{gem}$$

waarin:

$T_{gem}$  = de gemiddelde temperatuur in het materiaal

$\hat{T}_0$

= de amplitude van de temperatuurfluctuatie

$\omega$  = de hoekfrequentie van de temperatuurfluctuatie =  $2\pi f = 2\pi/T_p$  met

$f$  = de frequentie en  $T_p$  = de trillingstijd

De oplossing van de differentiaalvergelijking is nu (zie appendix C) :

$$T(x, \tau) = T_{gem} + \hat{T}_0 e^{-Ax} \cos \omega \left( \tau - \frac{x}{v} \right) \quad (1.14)$$

met :

$$v = \sqrt{2a\omega} \quad (1.15a)$$

en

$$A = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \quad (1.15b)$$

De grootte A is een maat voor de demping van de temperatuur amplitude in het materiaal, terwijl  $x/v$  de vertraging van de temperatuurgolf voor stelt ten opzichte van de oppervlakte-temperatuur, waarin  $v$  de voortplantingssnelheid van de lopende golf is in de positieve  $x$ -richting.

Substitutie van de waarden van  $v$  en  $A$  in (1.14) geeft uiteindelijk de oplossing :

$$T_w(x, \tau) = T_{gem} + \hat{T}_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\omega\left(\tau - \frac{x}{\sqrt{2a\omega}}\right) \quad (1.16a)$$

of ook

$$T_w(x, \tau) = T_{gem} + \hat{T}_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega\tau - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right) \quad (1.16b)$$

Formule (1.16a) of (1.16b) beschrijft dus het verloop van de warmte-indringing in een (nog steeds!) half-oneindig medium.

De term  $e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}$  is hierbij een maat voor de demping van de temperatuurgolf. Om deze demping te concretiseren heeft men het begrip dempingsdiepte  $x_e$  ingevoerd. Hieronder wordt verstaan die diepte waarbij de exponent van de  $e$ -macht de waarde  $-1$  heeft aangenomen, dus :

$$e^{-x_e\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} = e^{-1} \approx 0,37.$$

Voor de dempingsdiepte wordt dan gevonden :

$$x_e = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \quad (1.17)$$

Als maat voor de tijdvertraging heeft men  $\tau_v$  ingevoerd, dit is de tijd die de golf nodig heeft om zich 1 m voort te planten, zodat met behulp van (1.15a) :

$$\tau_v = \frac{1}{v} = \frac{1}{\sqrt{2a\omega}} \quad (1.18)$$

Op een plaats  $x$  is de tijdvertraging dan  $x\tau_v = \frac{x}{v}$ .

Voor een temperatuursvereffeningscoëfficiënt  $a = 10^{-6}$  SI vinden we de volgende waarden. dagfluctuatie :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{24.3600} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ [1/s]}$$

$$A = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = 6,03 \text{ [1/m]}$$

$$x\tau_v = \frac{x}{\sqrt{2a\omega}} = 23 \cdot x \text{ (in uren)} \text{ en } x_e = \frac{1}{A} = 0,17 \text{ m.}$$

jaarfluctuatie

$$\omega = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \cdot 365} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ [1/s]}$$

$$A = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = 0,32 \text{ [1/m]}$$

$$x\tau_v = \frac{x}{\sqrt{2a\omega}} = 18,3 \cdot x \text{ (in dagen)} \text{ en } x_e = \frac{1}{A} = 3,13 \text{ m.}$$

Figuur 1.11 laat het temperatuuramplitudedemping  $\frac{\hat{T}_x}{\hat{T}_0}$  en de tijdvertraging  $x\tau_v$  zien voor zowel een dag- als een jaarfluctuatie.

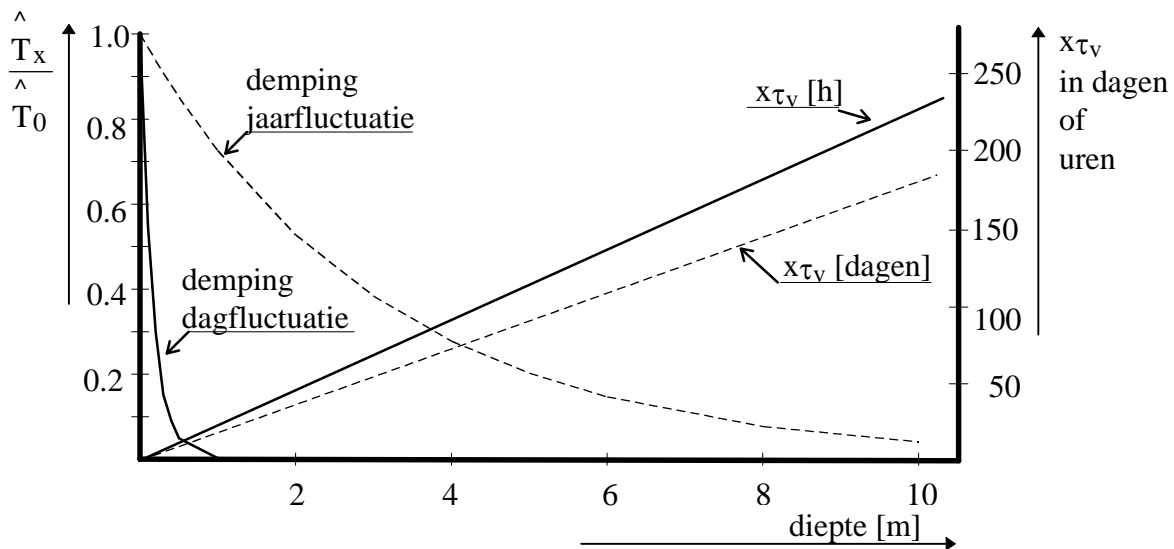


fig. 1.11 Indemping van dag respectievelijk jaaramplitude in halfoneindig medium.

In vergelijking met de jaarfluctuatie is de temperatuur bij een dagfluctuatie sneller uitgedempt en heeft een kortere tijdvertraging.

### 1.7. Periodiek verlopende voorgeschreven luchttemperatuur temperatuur en zonbestraling.

In het voorgaande is verondersteld dat aan het oppervlak ( $x = 0$ ) van de randvoorwaarde

$$T(0, \tau) = T_{gem} + \hat{T}_0 \cos \omega \tau \text{ alle grootheden bekend waren.}$$

In werkelijkheid ligt het gecompliceerder en kent men vaak de grootte van de amplitude  $\hat{T}_0$  niet. De oppervlaktetemperatuur van buitenoppervlakken, zoals het aardoppervlak of wegdekoppervlakken, wordt bepaald door twee periodiek veranderende grootheden en wel de buitenluchttemperatuur  $T_e$  en

de zonbelasting  $q_{z\text{on}}$ . Beide laatstgenoemde grootheden zijn wel voldoende bekend en kunnen met de zogenaamde Sol Air Temperature beschreven worden.

$$T_{\text{SAT}} = T_e + \frac{a_z q_z}{\alpha_e}.$$

Het lijkt daarom zinvol de niet-stationaire warmte-indringing mathematisch enigszins anders te formuleren, en wel door weer uit te gaan van de differentiaalvergelijking van Fourier, maar nu voor  $x = 0$  een andere randvoorwaarde in te voeren, waarbij  $T_{\text{SAT}}$  gebruikt zal worden.

Bij de berekening zal worden uitgegaan, dat  $T_e$  en  $q_{z\text{on}}$  met behulp van een enkelvoudige cosfunctie kunnen worden weergegeven, waardoor ook  $T_{\text{SAT}}$  periodiek verloopt (zie figuur 1.12).

$$q_{z\text{on}} = \bar{q}_{z\text{on}} + \hat{q}_{z\text{on}} \cos \omega(\tau - 12) \quad (1.19)$$

$$T_e = \bar{T}_e + \hat{T}_e \cos \omega[(\tau - 12) - \tau_e] \quad (1.20)$$

$$T_{\text{SAT}} = \bar{T}_{\text{SAT}} + \hat{T}_{\text{SAT}} \cos \omega[(\tau - 12) - \tau_{\text{SAT}}] \quad (1.21)$$

waarin  $\tau_{\text{SAT}}$  de tijdvertraging t.o.v.  $q_{z\text{on}}$  voorstelt.

Het maximum van  $q_{z\text{on}}$  valt hierbij om 12 uur en het maximum voor  $T_e$  ligt bij  $(12 + \tau_e)$  uur.

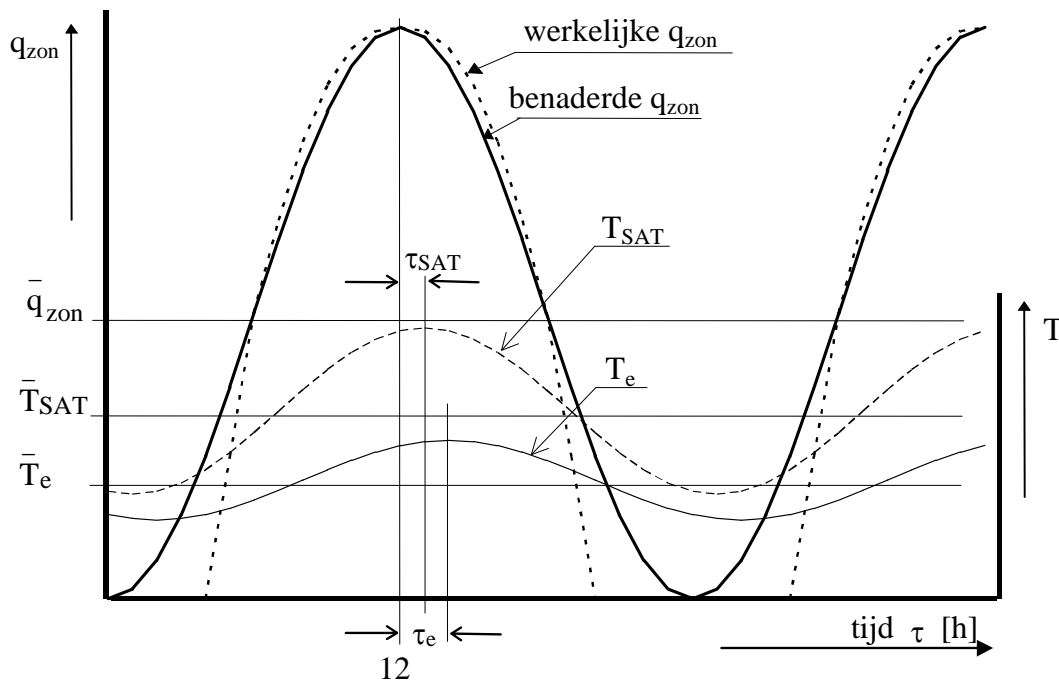


fig. 1.12.

Door substitutie van de vergelijkingen (1.19) en (1.20) in de betrekking  $T_{\text{SAT}} = T_e + \frac{a_z q_z}{\alpha_e}$  volgt direct voor de gemiddelde waarde van de Sol Air Temperature:

$$\bar{T}_{\text{SAT}} = \bar{T}_e + \frac{a_z \bar{q}_{z\text{on}}}{\alpha_e}, \quad (1.22)$$

terwijl voor het periodieke deel wordt gevonden (appendix D):

$$\omega\tau_{SAT} = \text{arctg} \left\{ \frac{\hat{T}_e \sin \omega\tau_e}{\hat{T}_e \cos \omega\tau_e + \frac{a_z q_{zon}}{\alpha_e}} \right\} \quad (1.23a)$$

en

$$\hat{T}_{SAT} = \frac{\hat{T}_e \sin \omega\tau_e}{\sin \omega\tau_{SAT}} \quad (1.23b)$$

Substitutie van (1.22), (1.23a) en (1.23b) in uitdrukking (1.21) levert de gezochte oplossing voor de Sol Air Temperature  $T_{SAT}$  op.

Met de invoering van  $T_{SAT}$  is het fysische probleem van de warmte-indringing ten gevolge van zonbelasting en luchttemperatuur vertaald in de warmte-indringing ten gevolge van een fictieve luchttemperatuur  $T_{SAT}$ .

De hierboven gevolgde procedure kan vaak worden gevolgd als de randvoorwaarden aan de rand van een vast medium beschreven worden door een voorgeschreven luchttemperatuur en opvallende straling.

Om de oppervlakte temperatuur  $T_w(0,\tau)$  met behulp van de berekende  $T_{SAT}$  te berekenen, gaan we

weer uit van de differentiaalvergelijking van Fourier  $\frac{\partial T_w}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}$ , met als periodieke oplossing :

$$T_w(x, \tau) = T_{gem} + \hat{T}_0 e^{-Ax} \cos \omega \left\{ (\tau - \tau_s) - \frac{x}{v} - \tau_0 \right\} \quad (1.24)$$

Hierin is :

$$\tau_s = 12 + \tau_{SAT}$$

$\tau_0$  = tijdvertraging van de temperatuur aan het oppervlak t.o.v. de Sol Air Temperature met A volgens (1.15b) en v volgens (1.15a)

In appendix E worden voor de tijdvertraging en temperatuuramplitude de volgende waarden berekend :

$$\omega\tau_0 = \text{arctg} \left( \frac{\lambda A}{\lambda A + \alpha_e} \right) \quad (1.24a)$$

en

$$\hat{T}_0 = \frac{\alpha_e \hat{T}_{SAT}}{\sqrt{(\lambda A + \alpha_e)^2 + (\lambda A)^2}} \quad (1.24b)$$

Het is verder eenvoudig in te zien dat bij een zeer dikke wand de stationaire  $T_{gem}$  nagenoeg gelijk is aan  $T_{SAT}$ .

### 1.8. Meewerkende dikte bij periodiek verlopende temperatuurbelasting.

Ook in het geval van periodiek verlopende luchttemperaturen is een meewerkende diepte  $d_{mw}$  in te voeren.

We gaan weer uit van vergelijking (1.10)

$$\rho c d_{mw} \frac{dT_{w0}}{d\tau} = \alpha_i (T_i - T_{w0})$$

$T_i$  is nu een periodiek verlopende luchttemperatuur volgens :

$$T_i = \hat{T}_i \cos \omega \tau$$

Herschrijven we de differentiaalvergelijking tot

$$\frac{dT_{w0}}{d\tau} = \gamma (T_i - T_{w0}) \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{\alpha_i}{\rho c d_{mw}}$$

dan wordt de oplossing (zie appendix F):

$$T_{w0} = \hat{T}_{w0} \cos(\omega \tau - \varphi) \quad (1.25)$$

waarin:

$$\hat{T}_{w0} = \frac{\gamma \hat{T}_i}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \quad \text{en} \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)$$

De warmtestroomdichtheid, die de wand ingaat is in dit geval gelijk aan :

$$q_{w0} = \rho c d_{mw} \frac{dT_{w0}}{d\tau} = -\rho c d_{mw} \omega \hat{T}_{w0} \sin(\omega \tau - \varphi)$$

of:

$$q_{w0} = -\alpha_i \hat{T}_i \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \sin\left\{\omega \tau - \arctg\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)\right\} \quad (1.26)$$

In figuur 1.13 is voor beton  $q_{w0}$  voor verschillende waarden van  $d_{mw}$  bij een warmteovergangsweerstand  $\alpha_i = 8$  SI geschetst.

Tevens is het exacte verloop van  $q_{w0}$  voor een scheidingswand van 0,20 m tussen twee identieke ruimten door een stippellijn in de figuur weergegeven.

Het blijkt dus dat een keuze van  $d_{mw} = 0,073$  m tot een goede benadering leidt.

Merk op dat bij deze meewerkende dikte en warmteovergangsweerstand weliswaar een overeenstemming in de amplitude maar niet in de faseverschuiving is bewerkstelligd.

Een betere benadering kan worden verkregen als we naast de variatie van de meewerkende dikte  $d_{mw}$  ook de  $\alpha_i$  bijstellen. Volgens een methode beschreven in (Tjon,1981) is de overeenkomst voor zowel de amplitude als de faseverschuiving te verkrijgen door voor de meewerkende dikte een waarde van ca. 0,098 m en voor  $\alpha_i$  een waarde van 7,1 SI te kiezen (niet in de figuur weergegeven).



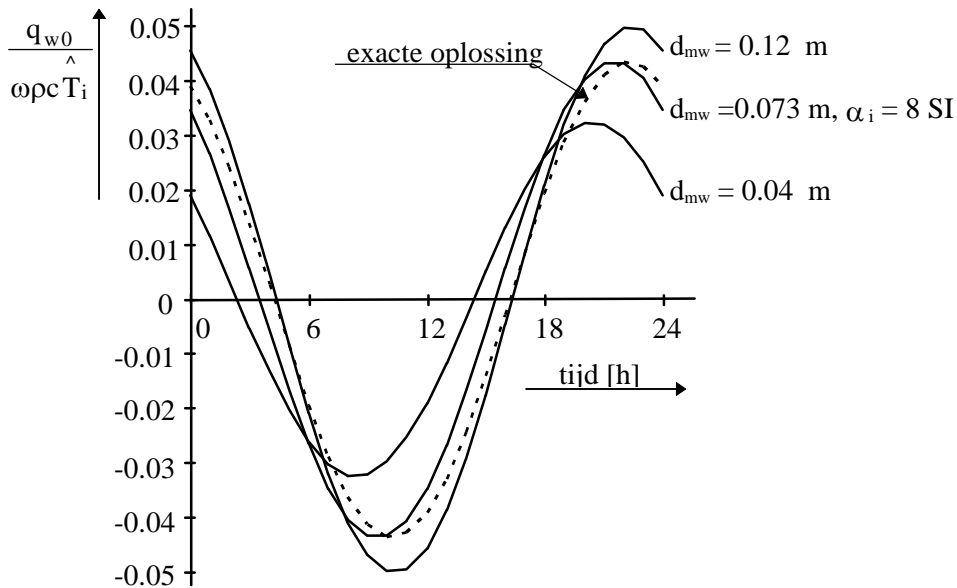


fig. 1.13

Als we verder ook nog de vereenvoudiging maken dat de aanwezige warmtecapaciteit niet de temperatuur  $T_{w0}$ , maar de temperatuur  $T_i$  heeft, moeten we (zoals bij de sprongvormige verandering in de luchttemperatuur is gebeurd)  $d_{mw}$  als volgt aanpassen :

$$d_{mw}^* = d_{mw} \frac{\hat{T}_{w0}}{T_i} = d_{mw} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \quad (1.27)$$

De meewerkende dikte  $d_{mw}$  wordt gecorrigeerd tot:

$$d_{mw}^* = d_{mw} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} = 0,073 \cdot 0,60 = 0,044 \text{ m bij een } \alpha_i = 8 \text{ SI of}$$

$$d_{mw}^* = d_{mw} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} = 0,098 \cdot 0,45 = 0,044 \text{ m bij een } \alpha_i = 7,1 \text{ SI.}$$

### 1.9. Praktische consequenties

1. In een grondmassief op 10 m diepte is de temperatuur vrijwel constant, dus noch van de zomerse warmte, noch van de winterse koude is op een dergelijke diepte veel merkbaar (denk aan grotten in Zuid-Limburg). De temperatuur is daar nagenoeg constant en gelijk aan de gemiddelde jaartemperatuur.
2. De jaarlijkse temperatuurschommeling dringt enkele meters door met een vertraging van weken. De dagelijkse temperatuurschommelingen zijn na tientallen centimeters reeds uitgedempt met een vertraging in uren.
3. De gemiddelde jaartemperatuur in Nederland is ongeveer  $T_{gem} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ , terwijl voor de jaarlijkse rimpel aan het oppervlak gesteld kan worden  $\hat{T}_0 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ . Op 1 m diepte is de temperatuuramplitudedemping 0,73. (figuur 1.5). De laagste temperatuur op die diepte is dan gelijk aan  $10 - 0,73 \cdot 15 = -0,95 \text{ }^\circ\text{C}$ . Op een diepte van meer dan 1 meter zal de temperatuur dus niet lager worden dan  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , zodat een waterleiding op meer dan 1 meter diepte vorstvrij zal blijven.

Deze diepte is natuurlijk afhankelijk van de warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda$ , de dichtheid  $\rho$  en de soortelijke warmte  $c$  van de grond.

4. Uit figuur 1.5 blijkt dat voor dagfluctuaties de behandelde berekeningsmethode als benadering voor de bepaling van de verdeling van de periodieke temperatuursveranderingen in een wand kan worden gebruikt, indien de wanddikte groter is dan de dempingsdiepte. Wanneer de temperatuurbelasting voor de wand gesplitst is in een stationair en een instationair deel, wordt de totale temperatuursverdeling in een wand gevonden door superpositie van de berekende stationaire en instationaire oplossingen.

#### **Literatuur.**

Carslaw, H.S. and J.C. Jaeger, Conduction of heat in solids, Oxford university press 1959.

Tjon Sien Kie, H.K., Dynamisch gedrag van een Givoni-huis, afstudeerverslag C-027, vakgroep Bouwfysica, faculteit der Civiele Techniek, TU-Delft, 1981.

# APPENDICES BEHORENDE BIJ HOOFDSTUK 1.

## Appendix A.

De temperatuur in een dikke wand bij een sprongvormig voorgeschreven oppervlaktetemperatuur.

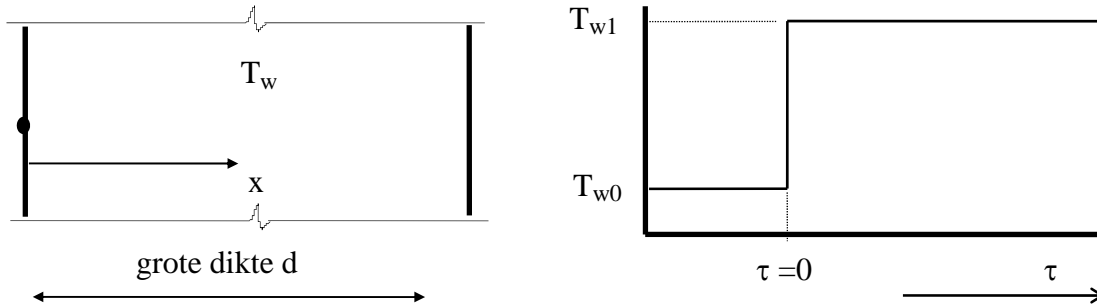


fig. A1

De differentiaalvergelijking, die het proces in figuur A1 beschrijft, luidt :

$$\frac{\partial T_w}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \quad (A1)$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking zal drie onbekende constanten bevatten en moet ten eerste voldoen aan de differentiaalvergelijking en ten tweede aan de beginvoorwaarde en de twee randvoorwaarden.

Een oplossing die voldoet aan de differentiaalvergelijking is:

$$T_w(x, \tau) = A + B + C \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta=0}^{\beta=\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta \quad (A2a)$$

Hierin stelt  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\beta=0}^{\beta=\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}} e^{-\beta^2} d\beta = \text{erf}(\beta)$  de foutenintegraal of errorfunctie voor, zodat:

$$T_w(x, \tau) = A + B + C \cdot \text{erf}(\beta) \quad (A2b)$$

Er zal nu worden aangetoond dat de oplossing (A2a) voldoet aan de differentiaalvergelijking.

$$\frac{\partial T_w}{\partial \tau} = \frac{\partial T_w}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} = C \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2} \frac{x}{2\sqrt{a}} \frac{-1}{2\tau\sqrt{\tau}} = C \cdot \frac{-x}{2\tau\sqrt{\pi a \tau}} e^{-\beta^2} \quad (A3a)$$

$$a \frac{\partial T_w}{\partial x} = a \frac{\partial T_w}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = C \cdot \frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2} \frac{1}{2\sqrt{a\tau}} = C \cdot \frac{a}{\sqrt{\pi a \tau}} e^{-\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
a \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} &= C \cdot \frac{a}{\sqrt{\pi a \tau}} \frac{\partial e^{-\beta^2}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = C \cdot \frac{a}{\sqrt{\pi a \tau}} e^{-\beta^2} \frac{-2\beta}{2\sqrt{a\tau}} = C \cdot \frac{a}{\sqrt{\pi a \tau}} e^{-\beta^2} \frac{-x}{2a\tau} \\
&= C \cdot \frac{-x}{\tau \sqrt{\pi a \tau}} e^{-\beta^2}
\end{aligned} \tag{A3b}$$

Uitdrukking (A3a) is gelijk aan (A3b), dus de oplossing voldoet aan de differentiaalvergelijking.

De onbekende constanten A, B en C moeten uit de beginvoorwaarde en de randvoorwaarden volgen.

beginvoorwaarde :  $\tau = 0$  en  $x \geq 0$  :  $T_w(x, 0) = T_0$

randvoorwaarden :  $\tau > 0$  en  $x = 0$  :  $T_w(0, \tau) = T_1$

$\tau > 0$  en  $x = \infty$  :  $T_w(\infty, \tau) = T_0$

De eerste randvoorwaarde geeft dat  $\beta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} = 0$ , zodat  $\text{erf}(\beta) = 0$ , dus  $A = T_1$ .

De beginvoorwaarde levert :  $\beta = \infty$ , zodat  $\text{erf}(\beta) = 1$  en  $T_0 = T_1 + B \cdot x + C$ .

Uit de tweede randvoorwaarde volgt dat de oplossing eindig moet blijven, dus  $B = 0$ , zodat :  
 $C = T_0 - T_1$ .

De oplossing wordt hiermee :

$$T_w(x, \tau) = T_1 + (T_0 - T_1) \cdot \text{erf}(\beta) \quad \text{met} \quad \beta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \tag{A4}$$

## Appendix B.

De opgenomen warmte door een wand bij een sprongvormig voorgeschreven luchttemperatuur.

De warmtestroomdichtheid aan het oppervlak is gelijk aan :

$$q_{w0} = \alpha_c (T_1 - T_{w0}) = \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 \{1 - \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau})\} \quad (\text{B1})$$

De door het materiaal opgenomen warmte kan worden berekend door (B1) in de tijd te integreren :

$$Q = \int_0^\tau q_{w0} d\tau = \int_0^\tau \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 d\tau - \int_0^\tau \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) d\tau$$

De eerste term is eenvoudig te integreren en geeft :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 d\tau &= \int_0^\tau \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 \frac{1}{h^2 a} d e^{h^2 a \tau} = \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} e^{h^2 a \tau} \Big|_0^\tau = \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} (e^{h^2 a \tau} - 1) \\ &= \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} (e^{h^2 a \tau} - 1) \end{aligned} \quad (\text{B2a})$$

De tweede term wordt door middel van partiële integratie bepaald.

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) d\tau &= \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} \int_0^\tau \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) d(e^{h^2 a \tau}) \\ &= \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} \left[ e^{h^2 a \tau} \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) \Big|_0^\tau - \int_0^\tau e^{h^2 a \tau} d\{\operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau})\} \right] \end{aligned}$$

Wanneer we bedenken dat  $\operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta=h\sqrt{a\tau}} e^{-\beta^2} d\beta$ , dan verloopt de differentiatie van

$\operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau})$  analoog als in appendix A, dus :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \alpha_c e^{h^2 a \tau} \cdot T_1 \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) d\tau &= \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} \left[ e^{h^2 a \tau} \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) \Big|_0^\tau - \int_0^\tau e^{h^2 a \tau} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 a \tau} \frac{h\sqrt{a}}{2\sqrt{\tau}} d\tau \right] \\ &= \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} \left[ e^{h^2 a \tau} \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) \Big|_0^\tau - \frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau \right] \\ &= \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} \left[ e^{h^2 a \tau} \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) \Big|_0^\tau - \frac{2h\sqrt{a\tau}}{\sqrt{\pi}} \Big|_0^\tau \right] \\ &= \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} \left[ e^{h^2 a \tau} \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) - \frac{2h\sqrt{a\tau}}{\sqrt{\pi}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B2b})$$

(B2a) en (B2b) geven uiteindelijk

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\tau} q_{w0} d\tau = \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} \left( e^{h^2 a \tau} - 1 \right) - \frac{\alpha_c T_1}{h^2 \tau} \left[ e^{h^2 a \tau} \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) - \frac{2h\sqrt{a\tau}}{\sqrt{\pi}} \right] \\ &= \frac{\alpha_c T_1}{h^2 a} \left[ e^{h^2 a \tau} \left\{ 1 - \operatorname{erf}(h\sqrt{a\tau}) \right\} + 2h\sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} - 1 \right] \end{aligned}$$

## Appendix C.

**De temperatuur in een dikke wand bij een periodiek verlopende voorgeschreven oppervlaktetemperatuur.**

Differentiaalvergelijking :

$$\frac{\partial T_w}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}$$

Randvoorwaarden :

$$\text{voor } \tau > 0 \text{ en } x = 0 \rightarrow T_w(0, \tau) = T_{\text{gem}} + \hat{T}_0 \cos \omega \tau$$

$$\text{in } \tau > 0 \text{ en } x = \infty \rightarrow T_w(\infty, \tau) = T_{\text{gem}}$$

waarin:

$T_{\text{gem}}$  = de gemiddelde temperatuur in het materiaal

$\hat{T}_0$  = de amplitude van de temperatuurfluctuatie

$\omega$  = de amplitude van de temperatuurfluctuatie =  $2\pi f = 2\pi/T_p$  met

$f$  = de frequentie en  $T_p$  de trillingstijd

Omdat de randvoorwaarde een periodieke functie is, wordt het probleem voor de tijd indifferent en daarmee het begintijdstip arbitrair, zodat geen speciale beginvoorwaarde is.

De differentiaalvergelijking is lineair, zodat de oplossing dus ook periodiek moet zijn en wel met dezelfde frequentie. Deze oplossing kan op formele wijze worden afgeleid. Gekozen is echter voor een intuïtieve benadering.

De tweede randvoorwaarde geeft weer dat op grote diepte de temperatuurschommeling is uitgedempt. De oplossing bevat dus naast een periodiek verlopende term ook een factor die de demping beschrijft afhankelijk van de plaats. Uit ervaring weten we dat een massa met een warmtecapaciteit warmte kan vasthouden en vertraagd doorgeeft, zodat deze vertraging tot uiting moet komen in de oplossing.

Stel nu dat de oplossing van de differentiaalvergelijking is :

$$T_w(x, \tau) = T_{\text{gem}} + \hat{T}_0 e^{-Ax} \cos \omega \left( \tau - \frac{x}{v} \right) \quad (\text{C1})$$

met :

$A$  = een maat voor de demping

$x/v$  = een maat voor de vertraging, waarin  $v$  de voortplantingsnelheid van de lopende golf is in de positieve  $x$ -richting

Eenvoudig is in te zien dat de oplossing voldoet aan de randvoorwaarden. Met de veronderstelling dat de oplossing ook moet voldoen aan de differentiaalvergelijking, kunnen door substitutie de onbekende grootheden  $A$  en  $v$  worden bepaald.

Na eenmaal differentiëren naar  $\tau$  en tweemaal differentiëren naar  $x$ , substitutie in de

differentiaalvergelijking en delen door  $\hat{T}_0 e^{-Ax}$  volgt :

$$-\omega \sin \omega \left( \tau - \frac{x}{v} \right) = a \left[ \left\{ A^2 - \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \right\} \cos \omega \left( \tau - \frac{x}{v} \right) - 2A \frac{\omega}{v} \sin \omega \left( \tau - \frac{x}{v} \right) \right]$$

Door gelijkstellen van de coëfficiënten van de overeenkomstige periodieke termen in linker- en rechterlid volgt :

$$1) \quad A^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \quad \text{of} \quad A = \pm \frac{\omega}{v}$$

Het min-teken voldoet niet, aangezien dit zou betekenen dat de amplitude van de temperatuur naar grotere  $x$  zou toenemen, hetgeen fysisch onjuist is.

$$\text{Dus : } A = \frac{\omega}{v} \quad (C2a)$$

$$2) \quad \omega = 2A \frac{\omega}{v} a \quad \text{of} \quad v = 2 \frac{\omega}{v} a \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2a\omega} \quad (C3b)$$

Substitutie van (6.8b) in (6.8a) geeft:

$$A = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \quad (C3c)$$

De waarden van  $v$  en  $A$  uit (C3b) en (C3c) ingevuld in (C1) geven uiteindelijk de oplossing :

$$T_w(x, \tau) = T_{\text{gem}} + \hat{T}_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\omega\left(\tau - \frac{x}{\sqrt{2a\omega}}\right)$$

of ook

$$T_w(x, \tau) = T_{\text{gem}} + \hat{T}_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega\tau - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right)$$



## Appendix D.

### Sol Air Temperature SAT.

We voeren de fictieve luchttemperatuur  $T_{SAT}$  in :

$$T_{SAT} = T_e + \frac{a_z q_z}{\alpha_e} \quad (D1).$$

en gaan weer uit van de differentiaalvergelijking van Fourier, terwijl we voor  $x = 0$   $T_{SAT}$  in de randvoorwaarde gebruiken.

Bij de berekening van  $T_{SAT}$  zal worden uitgegaan, dat  $T_e$  en  $q_{zon}$  met behulp van een enkelvoudige cosfunctie kunnen worden weergegeven, waardoor ook  $T_{SAT}$  periodiek verloopt.

$$q_{zon} = \bar{q}_{zon} + \hat{q}_{zon} \cos \omega(\tau - 12) \quad (D2a)$$

$$T_e = \bar{T}_e + \hat{T}_e \cos \omega[(\tau - 12) - \tau_e] \quad (D2b)$$

$$T_{SAT} = \bar{T}_{SAT} + \hat{T}_{SAT} \cos \omega[(\tau - 12) - \tau_{SAT}] , \quad (D2c)$$

waarin  $\tau_{SAT}$  de tijdvertraging t.o.v.  $q_{zon}$  voorstelt.

Het maximum van  $q_{zon}$  valt hierbij om 12 uur en het maximum voor  $T_e$  ligt bij  $(12 + \tau_e)$  uur.

Door substitutie van de vergelijkingen (1.13) en (1.14) in de betrekking  $T_{SAT} = T_e + \frac{a_z q_z}{\alpha_e}$

volgt direct voor de gemiddelde waarde van de Sol Air Temperature:

$$\bar{T}_{SAT} = \bar{T}_e + \frac{a_z \bar{q}_{zon}}{\alpha_e} , \quad (D3)$$

terwijl voor het periodieke deel wordt gevonden:

$$\hat{T}_{SAT} \cos \omega[(\tau - 12) - \tau_{SAT}] = \hat{T}_e \cos \omega[(\tau - 12) - \tau_e] + \frac{a_z \hat{q}_{zon}}{\alpha_e} \cos \omega(\tau - 12) \quad (D4)$$

Uitwerken van (D4) geeft :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{SAT} \cos \omega(\tau - 12) \cos \omega \tau_{SAT} + \hat{T}_{SAT} \sin \omega(\tau - 12) \sin \omega \tau_{SAT} = \\ \hat{T}_e \cos \omega(\tau - 12) \cos \omega \tau_e + \hat{T}_e \sin \omega(\tau - 12) \sin \omega \tau_e + \frac{a_z \hat{q}_{zon}}{\alpha_e} \cos \omega(\tau - 12) \end{aligned}$$

Gelijkstellen van de coëfficiënten van de termen met  $\cos \omega(\tau - 12)$  resp.  $\sin \omega(\tau - 12)$  levert de volgende vergelijkingen :

$$\hat{T}_{SAT} \cos \omega \tau_{SAT} = \hat{T}_e \cos \omega \tau_e + \frac{a_z \hat{q}_{zon}}{\alpha_e} \quad (D5)$$

$$\text{en } \hat{T}_{SAT} \sin \omega \tau_{SAT} = \hat{T}_e \sin \omega \tau_e \quad (D6)$$

Dit zijn twee vergelijkingen met de twee onbekenden  $\hat{T}_{SAT}$  en  $\tau_{SAT}$ , waaruit na deling volgt:

$$\omega\tau_{SAT} = \arctg \left\{ \frac{\hat{T}_e \sin \omega\tau_e}{\hat{T}_e \cos \omega\tau_e + \frac{a_z q_{zon}}{\alpha_e}} \right\} \quad (D7)$$

Substitutie van (D7) in (D6) levert dan de gezochte waarde van  $\hat{T}_{SAT}$  op.

$$\hat{T}_{SAT} = \frac{\hat{T}_e \sin \omega\tau_e}{\sin \omega\tau_{SAT}} \quad (D8)$$

## Appendix E.

### De oppervlaktetemperatuur bij een periodiek verlopende voorgeschreven luchttemperatuur.

We stellen de oppervlakte temperatuur  $T_w(0,\tau)$  gelijk aan:

$$T_w(x, \tau) = T_{gem} + \hat{T}_0 e^{-Ax} \cos \omega \left\{ (\tau - \tau_s) - \frac{x}{v} - \tau_o \right\} \quad (E1)$$

Hierin is :

$$\tau_s = 12 + \tau_{SAT}$$

$\tau_o$  = tijdvertraging van de temperatuur aan het oppervlak t.o.v. de Sol Air Temperature met A volgens (C3b) en v volgens (C3c)

Als randvoorwaarde gebruiken we nu echter :

$$-\lambda \left( \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right)_{x=0} = \alpha_e \{ T_{SAT} - T_w(0, \tau) \} \quad (E2)$$

Na differentiëren van (E1) en substitutie in (E2) volgt :

$$\lambda A \hat{T}_0 \cos \{ \omega(\tau - \tau_s) - \tau_o \} - \frac{\omega \lambda}{v} \hat{T}_0 \sin \{ \omega(\tau - \tau_s) - \tau_o \} = \alpha_e \hat{T}_{SAT} \cos \omega(\tau - \tau_s) - \alpha_e \hat{T}_0 \cos \omega \{ (\tau - \tau_s) - \tau_o \}$$

Na uitschrijven en gelijkstelling van de coëfficiënten van de  $\sin \omega(\tau - \tau_s)$  termen krijgen we:

$$\omega \tau_o = \arctg \left( \frac{\lambda A}{\lambda A + \alpha_e} \right) \quad (E3a)$$

De termen met  $\cos \omega(\tau - \tau_s)$  leveren:

$$\hat{T}_0 = \frac{\alpha_e \hat{T}_{SAT}}{(\lambda A + \alpha_e) \cos \omega \tau_o + \lambda A \sin \omega \tau_o} \quad (E3b)$$

of ook:

$$\hat{T}_0 = \frac{\alpha_e \hat{T}_{SAT}}{\sqrt{(\lambda A + \alpha_e)^2 + (\lambda A)^2}} \quad (E3c)$$

## Appendix F.

De temperatuur van de meewerkende dikte bij een periodiek verlopende voorgeschreven luchttemperatuur.

$$\frac{dT_{w0}}{d\tau} = \gamma(T_i - T_{w0}) \quad \text{met} \quad \gamma = \frac{\alpha_i}{\rho c d_{mw}} \quad (\text{F1})$$

Oplossing:

$$T_{w0} = \hat{T}_{w0} \cos(\omega\tau - \varphi) \quad (\text{F2})$$

Veronderstellen we dat de luchttemperatuur  $T_i$  verloopt volgens

$$T_i = \hat{T}_i \cos \omega\tau$$

dan geldt na substitutie van (F2) en  $T_i$  in (F1) :

$$-\omega \hat{T}_{w0} \sin(\omega\tau - \varphi) = \gamma \hat{T}_i \cos \omega\tau - \gamma \hat{T}_{w0} \cos(\omega\tau - \varphi)$$

Uitwerken geeft:

$$-\omega \hat{T}_{w0} \sin \omega\tau \cos \varphi + \omega \hat{T}_{w0} \cos \omega\tau \sin \varphi = \gamma \hat{T}_i \cos \omega\tau - \gamma \hat{T}_{w0} \cos \omega\tau \cos \varphi - \gamma \hat{T}_{w0} \sin \omega\tau \sin \varphi$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van  $\sin \omega\tau$  links en rechts geeft:

$$\omega \cos \varphi = \gamma \sin \varphi, \text{ waaruit :}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)$$

De coëfficiënten van  $\cos \omega\tau$  leveren :

$$\omega \hat{T}_{w0} \sin \varphi = \gamma \hat{T}_i - \gamma \hat{T}_{w0} \cos \varphi$$

$$\text{Met } \sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \text{ en } \cos \varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \text{ volgt :}$$

$$\omega \hat{T}_{w0} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} = \gamma \hat{T}_i - \gamma \hat{T}_{w0} \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \Rightarrow \hat{T}_{w0} \left( \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} + \frac{\gamma^2}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \right) = \gamma \hat{T}_i,$$

waaruit :

$$\hat{T}_{w0} = \frac{\gamma \hat{T}_i}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}$$

## 2. WARMTE- EN VOCHTBALANS VAN EEN OMSLOTEN RUIMTE

### 2.1. Inleiding.

Wanneer we te maken hebben met een omsloten ruimte, zoals een kantoorvertrek bijvoorbeeld, vormen de wanden de begrenzing van de ruimte, waardoor een binnenklimaat ontstaat dat in het algemeen verschilt van het klimaat van de aangrenzende ruimten, waaronder ook het buitenklimaat.

Elke ruimte waarin zich personen bevinden, dient met verse (buitenlucht) te worden geventileerd aangezien er zuurstof verbruikt en kooldioxide geproduceerd wordt. Ook voor ruimten waarin gevaar bestaat van ophoping van een explosief gas of voor de mens schadelijke stoffen is luchtverversing noodzakelijk. Denk hierbij aan de afgifte van formaldehyde door spaanplaat en sommige kunststofschuimen en de afgifte van radongas door veel bouwmaterialen.

In de stookperiode veroorzaakt ventilatie met buitenlucht een niet te verwaarlozen aandeel in het warmteverlies, zeker wanneer het zeer goed geïsoleerde gebouwen of woningen betreft.

In de zomer is deze ventilatie een middel om de stijging van de binnenluchttemperaturen tengevolge van zoninstraling te beperken. Ook de gevolgen van warmtebronnen in de ruimte, zoals warmte tengevolge van verlichting en machines en warmteproductie van personen, kunnen, mits zij niet te groot zijn, door ventilatie met buitenlucht in de hand worden gehouden.

De luchtverversing met buitenlucht kan hetzij met natuurlijke ventilatie, hetzij met mechanische ventilatie worden verkregen.

Bij natuurlijke ventilatie zijn de drijvende krachten de winddrukverschillen en luchttemperatuurverschillen tussen binnen en buiten. Behalve door te openen ramen of klepramen treedt er ook lucht naar binnen door kieren bij de aansluiting van diverse constructies, zoals bijvoorbeeld bij raam en raamkozijn. Deze ventilatie wordt onwillekeurige ventilatie of infiltratie genoemd.

Bij mechanische ventilatie wordt gebruik gemaakt van een ventilator.

### 2.2. Gegeneraliseerde ventilatiebalans.

In figuur 2.1 is een ruimte met een volume  $V$  gegeven. Beschouw nu een eenheid  $E$  per  $m^3$  die getransporteerd of overgedragen kan worden, zoals bijvoorbeeld een hoeveelheid warmte of gas (waterdamp,  $CO_2$ -gas).

Het ventilatiedebiet is  $\dot{V}$   $m^3/s$ , terwijl in de ruimte een bron  $B$  aanwezig is.

De waarde van de overdraagbare eenheid buiten is gelijk aan  $E_e$  en binnen gelijk aan  $E_i$ .

Er wordt in de ruimte een complete menging verondersteld, zodat overal in de ruimte de grootte  $E_i$  constant is.

De wanden en het meubilair worden in staat geacht de overdraagbare eenheid op te nemen, in de figuur beschreven door  $\Phi_E$ .

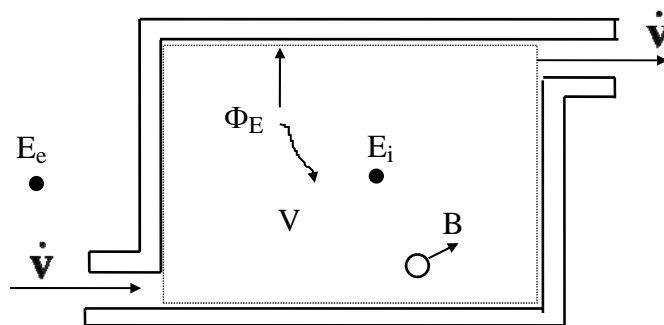


fig. 2.1.

De ventilatiestroom brengt een hoeveelheid  $\dot{V} E_e$  in de ruimte en uit de ruimte  $\dot{V} E_i$ .

De verandering in de tijd van  $E_i$  is gelijk aan  $\frac{dE_i}{d\tau}$ .

Wanneer we het controlevlak of systeembegrenzing laten samenvallen met de begrenzing van de ruimte aan de binnenzijde (in figuur 2.1 door de stippellijn aangegeven) wordt de ventilatiebalans :  
de verandering van de hoeveelheid  $E$  in de ruimte = productie aan  $E$  + aangevoerde hoeveelheid  $E$  - afgevoerde hoeveelheid  $E$  - de in wanden enz. opgenomen hoeveelheid  $E$ .

Dus :

$$V \frac{dE_i}{d\tau} = B + \dot{V} E_e - \dot{V} E_i - \Phi_E \quad (2.1)$$

### 2.3. Warmtebalans.

In dit geval is  $E$  gelijk aan de hoeveelheid warmte  $J/m^3$ , dus  $E = \rho c T$  in  $J/m^3$  en de bron  $B$  de warmteproductie  $W$  in Watt (= J/s).  $T$  is de temperatuur in K of  $^{\circ}C$ .

De grootte  $\rho c$  is de warmtecapaciteit van de lucht in  $J/m^3K$ .

Aan de warmteproductie kunnen verschillende bronnen bijdragen. Deze zijn bijvoorbeeld een eventuele verwarming of koeling (een negatieve bijdrage), de toetredende zonnewarmte in de ruimte en verdampingswarmte of condensatiewarmte van water.

Met  $\Phi_E$  wordt nu de hoeveelheid warmte bedoeld, die in de wanden wordt geaccumuleerd en daarna door geleiding (diffusie) naar buiten of naar een andere ruimte wordt afgevoerd. De geaccumuleerde warmte in de wanden speelt alleen een rol als een niet-stationaire toestand wordt beschouwd en de wanden een grote warmtecapaciteit hebben.

Als de wand of een deel van de wand een zeer geringe warmtecapaciteit heeft (bijvoorbeeld het glas in een raam) ten opzichte van de overige wanden is het warmtetransport door dit deel als bijna stationair op te vatten en wordt het warmtetransport alleen door geleiding bepaald en is de warmteweerstand van de wand of de  $U$ -waarde maatgevend voor de grootte van de warmtestroomdichtheid.

Voor het warmtetransport wordt balans (2.1) dus :

$$V \frac{d\rho c T}{d\tau} = W + \dot{V} \rho c T_e - \dot{V} \rho c T_i - \Phi_E \quad (2.2a)$$

of omdat de dichtheid  $\rho$  van de lucht en soortelijke warmtecapaciteit  $c$  constant worden verondersteld:

$$\rho c V \frac{dT}{d\tau} = W + \dot{V} \rho c T_e - \dot{V} \rho c T_i - \Phi_E \quad (2.2b)$$

### 2.4. Ventilatievoud $n$

Op de precieze totstandkoming van de ventilatie zal in dit college niet worden ingegaan en wordt uitgegaan dat er op een of andere manier een ventilatiestroom aanwezig is.

Er zal worden volstaan met de beschrijving van de ventilatie aan de hand van het zogenaamde ventilatievoud.

Het ventilatievoud  $n$  wordt als volgt gedefinieerd :

$$n = \frac{\text{volumestroom verse buitenlucht in } m^3 / s}{\text{volume van de beschouwde ruimte in } m^3} \left[ \frac{1}{s} \right]$$

Hiermee wordt de ventilatiestroom  $\dot{V}$  :  $\dot{V} = nV$ , dus

$$\rho c V \frac{dT}{d\tau} = W - nV \rho c (T_i - T_e) - \Phi_E \quad (2.2c)$$

## 2.5. Waterdamp - of CO<sub>2</sub> -concentratie.

Nu is E gelijk aan c in kg/m<sup>3</sup> of m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup> en de bron B aan G in kg/s of m<sup>3</sup>/s.  
Dus (2.1) wordt:

$$V \frac{dc_w}{d\tau} = G + \dot{V} c_{we} - \dot{V} c_{wi} - \Phi_E \quad (2.3)$$

of ook :

$$V \frac{dc_w}{d\tau} = G + nVc_{we} - nV c_{wi} - \Phi_E \quad (2.4)$$

Ook hier wordt met  $\Phi_E$  de hoeveelheid vocht bedoeld, die in de wanden wordt geaccumuleerd en daarna eventueel door diffusie naar buiten of naar een andere ruimte wordt afgevoerd. Het geaccumuleerde vocht speelt alleen een rol als een niet-stationaire toestand wordt beschouwd. Voor een kort tijdsinterval is geen directe transmissie door de wand naar de andere zijde van de wand, zodat de vochtweerstand geen rol speelt.

In een stationair veronderstelde toestand treedt wel diffusie door de wand naar de andere zijde op. In het algemeen is de vochtdiffusie door de wand veel en veel kleiner dan de hoeveelheid vocht die door ventilatie wordt afgevoerd.

Vochtaccumulatie in de wand ontstaat door opname van waterdamp door poreuze materialen. Plaatst men een poreus materiaal in een lucht met een zeker vochtgehalte dan kan in de kleine poriën capillaire condensatie optreden, doordat in een capillair de verzadigde waterdampspanning verlaagd is.

Figuur 2.4 laat het zogenaamde evenwichtsvochtgehalte zien van een materiaal.

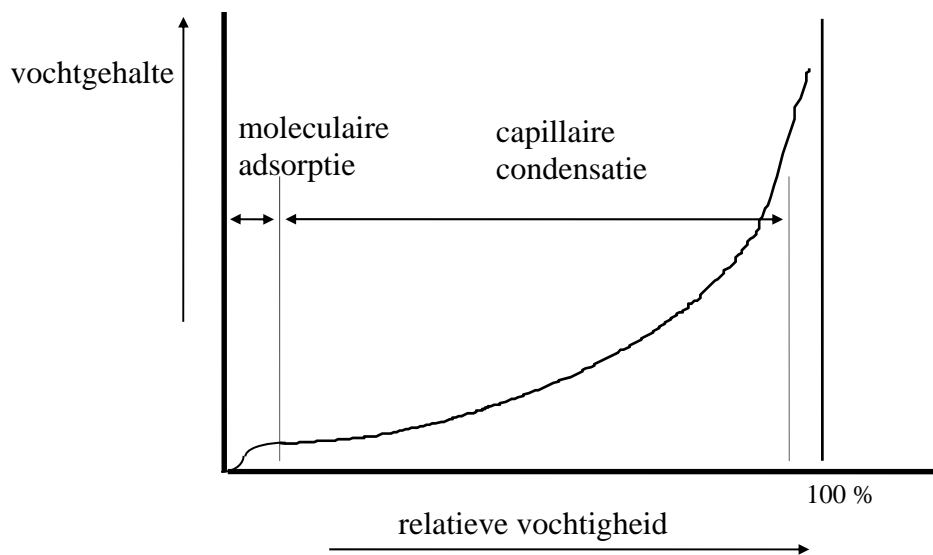


fig. 2.4. Verloop van evenwichtsvochtgehalte in een materiaal als functie van de RV van de omringende lucht

Bij lage relatieve luchtvochtigheid worden door adhesiekrachten de watermoleculen uit de lucht aan de poriënwanden gebonden (moleculaire

absorptie). Bij toeneming van de relatieve luchtvochtigheid treedt capillaire condensatie op. Bij zeer hoge luchtvochtigheid (>90 %) loopt de kromme zeer steil, het materiaal raakt verzadigd.

De helling van de kromme is afhankelijk van de poriënverdeling en dus van de soort materiaal.

In dit college zal hier niet op worden ingegaan en wordt verwezen naar de literatuur (Tammes, 1980).

In tegenstelling tot de accumulatie van warmte kan het opnameproces bij waterdamp dus niet oneindig lang voortduren in verband met verzadiging.

Bij kortdurende vochtproducties in een ruimte kan voor het materiaal een (constant veronderstelde) absorptiecoëfficiënt  $a_{vocht}$  worden ingevoerd (Künzel, 1965), die de opname van de waterdamp van de wand beschrijft. De vochtstroombichtheid naar de wand wordt dan geschreven als :

$$g_w = a_{\text{vocht}}(c_i(\tau) - c_0),$$

waarin

$c_i(\tau)$  = de vochtconcentratie van de ruimtelucht op een zeker tijdstip  $\tau$  en

$c_0$  = de vochtconcentratie van de ruimtelucht op tijdstip  $\tau = 0$

Voor de eenvoud bekijken we de oplossing van (2.4) voor wanden die geen vocht opnemen of doorlaten.

De differentiaalvergelijking (2.4) wordt dan :

$$V \frac{dc_{wi}}{d\tau} = G + nVc_{we} - nV c_w \quad (2.5a)$$

Met op  $\tau = 0$  :  $c_{wi}(\tau = 0) = c_{we}$

Met als oplossing :

$$c_{ir} = c_{we} + \frac{G}{nV} (1 - e^{-n \cdot \tau}) \quad (2.5b)$$

In stationaire toestand ( $=\tau \rightarrow$  oneindig) wordt (2.5a):

$$nV(c_{wi} - c_{we}) = G \quad (2.6)$$

$$\text{dus: } c_{wi} = c_{we} + \frac{G}{nV} \quad (2.7)$$

Wanneer het ventilatievoud bekend en constant is, zijn dus in stationaire toestand de optredende binnenluchttemperatuur, de relatieve luchtvochtigheid, enz. op eenvoudige wijze te berekenen. Ook omgekeerd kan uit een vereiste binnenluchttemperatuur bij bekende buitenluchttemperatuur het benodigde ventilatievoud worden berekend.

#### Literatuur.

Tammes, E en B.H. Vos, Warmte- en vochttransport in bouwconstructies, Kluwer Technische Boeken BV, Deventer-Antwerpen, 1980.

Künzel, H., Die Feuchtigkeitsabsorption von Innenoberflächen und Inneneinrichtungen. Berichte aus der Bauforschung, Heft 42, W. Ernst & Sohn, Berlin, 1965.



### 3. DYNAMISCHE WARMTEHUSHOUDING VAN EEN VERTREK

#### 3.1 Opwarming of afkoeling van een vertrek

In figuur 3.1 is schematisch een doorsnede van een kantoorvertrek gegeven.

De term  $\Phi_E$  in (3.2c) bevat nu behalve de warmtestroomdichtheid naar de wanden ( $q_w$ ) ook de warmtestroomdichtheid door het raam naar de buitenlucht (transmissie  $Tr_{glas}$ ; de warmtecapaciteit van het raam wordt verwaarloosd).

De warmtestroomdichtheid naar de wanden is :

$$q_w = -\lambda \frac{\partial T_w(x=0, \tau)}{\partial x} = \alpha_i \cdot \{T_i(\tau) - T_w(x=0, \tau)\} \quad (3.1)$$

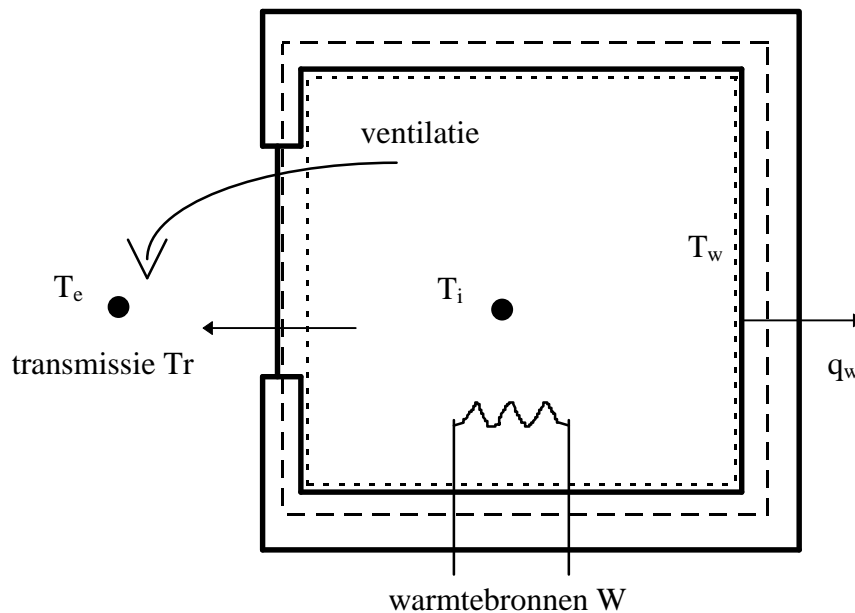


fig. 3.1 Schematische doorsnede van een kantoorvertrek/

Kiezen we het controlevlak voor de ventilatiebalans weer volgens de stippellijn, dan wordt het proces beschreven door de twee differentiaalvergelijkingen.

$$\text{Vertrek: } (\rho c)_{lu} V \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} = W - Tr_{glas} - Q_{vent} - q_w A_w \text{ of}$$

$$(\rho c)_{lu} V \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} = W - Tr_{glas} - Q_{vent} - \alpha_i \cdot \{T_i(\tau) - T_w(x=0, \tau)\} A_w \quad (3.2a)$$

- waarin  $A_w$  = wandoppervlak [ $m^2$ ]
- $\rho c_{lu}$  = specifieke thermische capaciteitlucht [ $W/m^3K$ ]
- $V$  = Volume van de ruimte [ $m^3$ ]
- $W$  = warmtebron [ $W$ ]
- $Tr$  = transmissieverlies [ $W$ ]
- $Q_{vent}$  = ventilatieverlies [ $W$ ]

$$\text{Wand: } (\rho c)_w \frac{\partial T_w(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T_w(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{x}^2} \quad (3.2b)$$

Dit systeem zal in het algemeen met behulp van een numerieke benadering moeten worden opgelost. Om inzicht te krijgen in het verloop van de binnenluchttemperatuur zullen stapsgewijs vereenvoudigingen worden ingevoerd.

Met behulp van uitdrukking (1.10) gaat (3.2a) over in :

$$(\rho c)_{lu} V \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} = W - Tr_{glas} - Q_{vent} - (\rho c)_w d_{mw} \frac{dT_w(\tau)}{d\tau} A_w \quad (3.3a)$$

Verder geldt nog steeds (4.10)

:

$$(\rho c)_w d_{mw} \frac{dT_w(\tau)}{d\tau} = \alpha_i \cdot \{T_i(\tau) - T_w(\tau)\} \quad (3.3b)$$

Het systeem beschreven door de vergelijkingen 3.2a en 3.2b is dus overgegaan in het systeem beschreven door 3.3a en 3.3b.

Hoewel het model nu eenvoudiger is geworden, is het nog niet mogelijk hiervan eenvoudig een gesloten analytische oplossing te berekenen.

Een grote vereenvoudiging volgt door aan te nemen dat de wandtemperatuur gelijk is aan de luchttemperatuur, dus  $T_w(\tau) = T_i(\tau)$ , waaruit:

$$(\rho c)_w d_{mw} \frac{dT_w(\tau)}{d\tau} = (\rho c)_w d_{mw}^* \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} \quad (3.4)$$

Substitutie van (3.4) in (3.3a) geeft dan :

$$\begin{aligned} (\rho c)_{lu} V \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} &= W - Tr_{glas} - Q_{vent} - (\rho c)_w d_{mw}^* \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} A_w \text{ of ook} \\ \left\{ (\rho c)_{lu} V + (\rho c)_w d_{mw}^* \cdot A_w \right\} \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} &= W - Tr_{glas} - Q_{vent} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vergelijking 3.3b is dus overbodig gemaakt en het complexe systeem beschreven met 3.2a en 3.2b is via 3.3a en 3.3b nu het zeer simpele systeem geworden beschreven door vergelijking 3.5.

In vergelijking 3.5 stelt de term tussen de accolades de totale warmtecapaciteit voor van lucht en wanden. We hebben nu dus het controlevlak laten samenvallen met de streepjeslijn in figuur 3.1.

De transmissie- en ventilatieverliezen  $Tr_{glas}$  en  $Q_{vent}$  zijn :

$$Tr_{glas} = U_r \cdot A_r (T_i(\tau) - T_e(\tau)) \quad \text{met } A_r = \text{oppervlak van het raam en} \\ \dots U_r = \text{U-waarde van het raam}$$

$$Q_{vent} = nV\rho c(T_i(\tau) - T_e(\tau))$$

Uitdrukking (3.5) wordt hiermee:

$$\left\{ (\rho c)_{lu} V + (\rho c)_w d_{mw}^* \cdot A_w \right\} \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} = W - U_r \cdot A_r \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\} - nV\rho c \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\} \quad (3.6)$$

Op  $\tau < 0$  wordt verondersteld :  $T_i(\tau = 0) = T_e$  en  $W = 0$ .

Voor  $\tau \geq 0$  geldt de warmteproductie  $W =$  eindige waarde en constant.

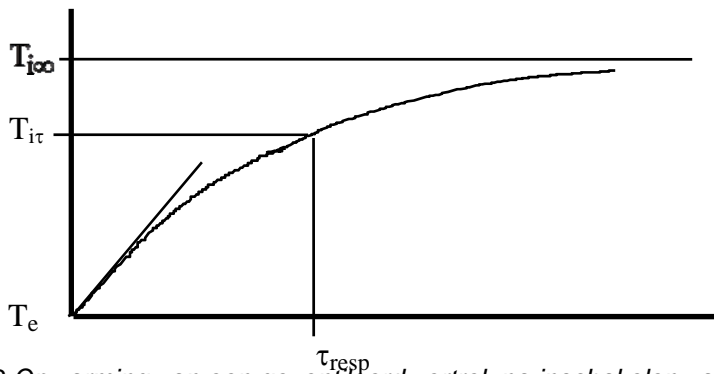
Indien aan uitdrukking (1.4) wordt voldaan is de oplossing:

$$T_{i\tau} = T_e + \frac{W}{A_r \cdot U_r + nV\rho c} \left\{ 1 - e^{-\frac{A_r \cdot U_r + nV\rho c}{(\rho c)_{lu} V + (\rho c)_w d_{mw}^* \cdot A_w} \cdot \tau} \right\} \quad (3.7)$$

In figuur 3.2 .is de oplossing (3.7) grafisch weergegeven.

Op  $\tau = 0$  is de in figuur 3.2 aangegeven beginhelling van het temperatuurverloop gelijk aan:

$$\frac{W}{(\rho c)_{lu} V + (\rho c)_w d_{mw}^* \cdot A_w}$$



ffg. 3.2 Opwarming van een geventileerd vertrek na inschakelen van de verwarming  $W$

Door de warmteproductie  $W$  stijgt de temperatuur in het vertrek. Na zeer lange tijd nadert de binnenluchttemperatuur de eindwaarde  $T_{i\infty}$ , dit is de temperatuur in de stationaire toestand. Aan uitdrukking (3.7) ( $e$ -macht) is te zien dat deze stationaire toestand eigenlijk pas bereikt wordt na een oneindig lange tijd en praktisch dus niet bereikt kan worden.

In deze stationaire toestand gaat (3.6) over in:

$$W = U_r \cdot A_r (T_i - T_e) + nV\rho c (T_i - T_e) \quad (3.8.)$$

$$\text{dus: } T_i = T_e + \frac{W}{U_r \cdot A_r + nV\rho c} \quad (3.9.)$$

### 3.2 Responsietijd.

Om een maat te hebben voor de snelheid waarmee de temperatuur stijgt, is de zogenaamde responsietijd  $\tau_{\text{resp}}$  ingevoerd. Dit is de tijd waarin de temperatuurstijging 63 % van de waarde van de eindtemperatuurstijging heeft bereikt, dus :

$$\frac{T_{i\tau} - T_e}{T_{i\infty} - T_e} = 1 - e^{-\frac{A_r \cdot U_r + nV\rho c}{(\rho c)_{lu} V + (\rho c)_w d_{mw}^* \cdot A_w} \cdot \tau_{\text{resp}}} \approx 1 - e^{-1} = 0,63$$

De responsietijd  $\tau_{\text{resp}}$  is hier dus gelijk aan :

$$\tau_{\text{resp}} = \frac{(\rho c)_{\text{lu}} V + (\rho c)_{\text{w}} d_{\text{mw}} A_{\text{w}}}{A_{\text{r}} \cdot U_{\text{r}} + n V \rho c} \quad (3.10)$$

### 3.3. Energiegebruik, graduren

Hiervoor is aandacht besteed aan de momentane warmtebalans.

Wanneer men geïnteresseerd is in de totale energiebehoefte voor verwarming van een kantoor, kantoorvertrek of woning in een bepaalde periode (bijvoorbeeld de winter), zal men deze momentane warmtebalans over deze periode moeten integreren.

In het volgende zal een handmatige methode worden gegeven om deze verwarmingsbehoefte te berekenen.

We gaan uit van de warmtebalans :

$$\left\{ (\rho c)_{\text{lu}} V + (\rho c)_{\text{w}} d_{\text{mw}} \cdot A_{\text{w}} \right\} \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} = W - U_{\text{gem}} \cdot A_{\text{tr}} \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\} - n V \rho c \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\} \quad (3.11)$$

waarin  $A_{\text{tr}}$  het oppervlak is waardoor transmissie kan optreden en  $U_{\text{gem}}$  de gemiddelde warmtetransmissiecoëfficiënt is van dat oppervlak.

De warmtebron  $W$  wordt gesplitst in een kunstmatige verwarmingsbron  $W_{\text{verw}}$  en de warmte winst ten gevolge van de ingevangen zonnewarmte en eventuele warmte door personen en apparatuur  $W_{\text{winst}}$ , dus :  $W = W_{\text{verw}} + W_{\text{winst}}$

De termen  $-U_{\text{gem}} \cdot A_{\text{tr}} \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\} - n V \rho c \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\}$  zijn het warmteverlies van de ruimte en schrijven we nu als  $-Vrl \cdot \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\}$ , terwijl de opslag- of accumulatieterm  $\left\{ (\rho c)_{\text{lu}} V + (\rho c)_{\text{w}} d_{\text{mw}} \cdot A_{\text{w}} \right\}$  door  $Cap$  wordt aangeduid.

Uitdrukking (3.11) wordt dus :

$$Cap \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} = W_{\text{verw}} + W_{\text{winst}} - Vrl \cdot \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\} \quad (3.12)$$

Integreren we (3.11) over een lange tijd van 0 tot  $\tau_{\text{eind}}$  dan krijgen we :

$$\int_0^{\tau_{\text{eind}}} Cap \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_0^{\tau_{\text{eind}}} W_{\text{verw}} d\tau + \int_0^{\tau_{\text{eind}}} W_{\text{winst}} d\tau - \int_0^{\tau_{\text{eind}}} Vrl \cdot \{T_i(\tau) - T_e(\tau)\} d\tau \quad (3.13)$$

Wanneer de binnenluchttemperatuur  $T_i$  constant wordt gehouden in de tijd (bijvoorbeeld in de winter met behulp van een thermostaat), is het linkerlid gelijk aan nul.

De totale energiebehoefte voor verwarming  $Q_{\text{verw}} = \int_0^{\tau_{\text{eind}}} W_{\text{verw}} d\tau$  is dan gelijk aan :

$$Q_{\text{verw}} = \int_0^{\tau_{\text{eind}}} Vrl \cdot \{T_i - T_e(\tau)\} d\tau - \int_0^{\tau_{\text{eind}}} W_{\text{winst}} d\tau \quad (3.14a)$$

of in discrete vorm

$$Q_{\text{verw}} = \sum_0^{\tau_{\text{eind}}} \text{Verl.} \{T_i - T_e(\tau)\} \Delta\tau - \sum_0^{\tau_{\text{eind}}} W_{\text{winst}} \Delta\tau \quad (3.14b)$$

Het verlies  $\sum_0^{\tau_{\text{eind}}} \text{Verl.} \{T_i - T_e(\tau)\} \Delta\tau$  kan worden uitgeschreven tot :

$$\begin{aligned} \sum_0^{\tau_{\text{eind}}} \text{Verl.} \{T_i - T_e(\tau)\} \Delta\tau &= \text{Verl}_1 \cdot \sum_0^{\tau_1} (T_i - T_{e1}) (\tau_1 - 0) \\ &+ \text{Verl}_2 \cdot \sum_{\tau_1}^{\tau_2} (T_i - T_{e2}) (\tau_2 - \tau_1) + \dots + \dots \\ &+ \text{Verl}_{\text{eind}} \cdot \sum_{\tau_{\text{eind}-1}}^{\tau_{\text{eind}}} (T_{\text{eind}} - T_{\text{eind}-1}) (\tau_{\text{eind}} - \tau_{\text{eind}-1}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

In figuur 3.3. is het temperatuurverschil tussen binnen- en buitenlucht grafisch weergegeven.

Wanneer de intervallen van gelijke lengte zijn en gelijk aan bijvoorbeeld 1 uur dan wordt

$$\sum_0^1 \{T_i - T_e\} \cdot 1 \text{ in het interval het aantal } (T_i - T_e) \text{ graaduren [Gh] genoemd.}$$

Kent men de uurlijkse waarden van de buitenluchttemperatuur  $T_e$  dan kan op deze wijze per tijdinterval het aantal graaduren worden bepaald en na vermenigvuldiging met Verl. het verlies in dit tijdinterval. Sommatie over alle tijdintervallen geeft het totale verlies van 0 tot  $\tau_{\text{eind}}$ .

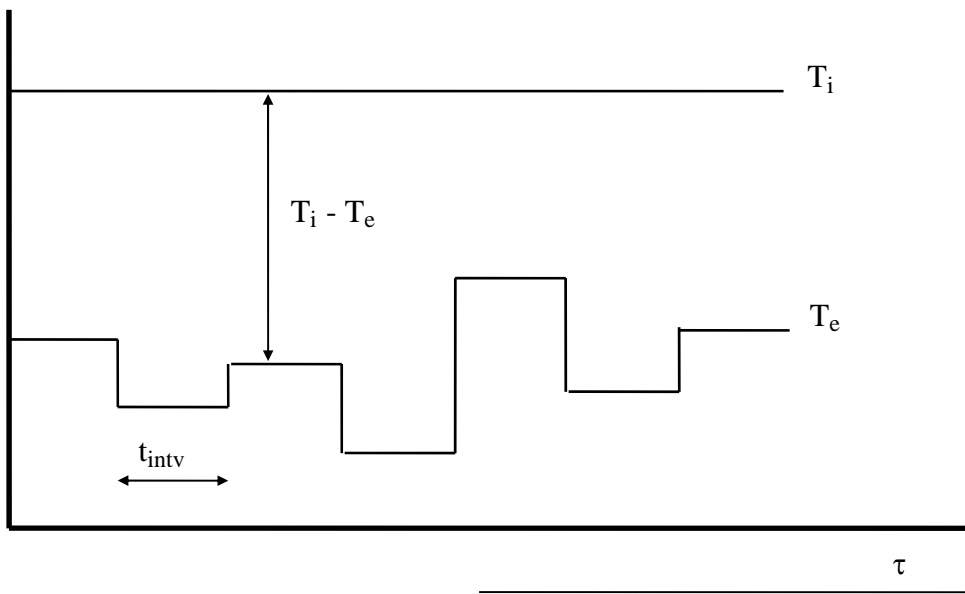


fig. 3.3 In de tijd fluctuerend temperatuurverschil tussen binnen en buiten in graaduren methoden

Als de daggemiddelde buitenluchttemperaturen bekend zijn kan op dezelfde wijze het aantal graaddagen [Gd] worden berekend.

De warmtewinst  $W_{winst}$  zal over het algemeen niet constant zijn (zonnestraling!).

Analoog aan (3.5) kan  $\sum_0^{\tau_{eind}} W_{winst} \Delta\tau$  worden uitgeschreven als :

$$\sum_0^{\tau_{eind}} W_{winst} \Delta\tau = W_{winst,1} \sum_0^{\tau_1} (\tau_1 - 0) + W_{winst,2} \sum_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - \tau_1) + \dots + W_{winst,eind} \sum_{\tau_{eind-1}}^{\tau_{eind}} (\tau_{eind} - \tau_{eind-1}) \quad (3.16)$$

Omdat de binnenluchttemperatuur niet vrijgelaten wordt, maar constant wordt gehouden zullen er momenten zijn dat er teveel warmtewinst aanwezig is. Deze overtollige warmte zal in de praktijk worden afgevoerd door bijvoorbeeld extra ventilatie. De met (3.15) berekende winst zal daarom niet volledig worden benut, zodat voor de warmtewinst een rendementsfactor  $\eta$  wordt ingevoerd. De te benutten winst is dus  $\eta \times W_{winst}$ .

Uit een groot aantal numerieke simulaties van kantoorvertrekken en woningen is de rendementsfactor  $\eta$  bepaald in afhankelijkheid van de warmtecapaciteit en transmissie- en ventilatieverlies.

*Voorbeeld van een seizoenberekening.*

Gegeven is een woning met :

- Volume 400 m<sup>3</sup>
- Gemiddelde U-waarde van de omhulling grenzend aan de buitenlucht U = 1 SI ; buitenoppervlak A = 100 m<sup>2</sup>
- Ventilatievoud n = 0,8 maal per uur
- Gewenste binnenluchttemperatuur T<sub>i</sub> = 20 °C
- Rendementsfactor voor zon  $\eta = 0,8$  ; totaal invallende zonstraling 6.10<sup>6</sup> Wh

Gevraagd: Het transmissie- en ventilatieverlies.

Berekening:

	nov.	dec	jan.	febr.	mrt	totaal
T <sub>e</sub> [°C]	5,0	2,9	2,3	2,5	4,9	
aant.dagen	30	31	31	28	31	
(20-T <sub>e</sub> ) x aant.dagen [Kdag]	450	530	549	490	468	2487

$$U.A + nV\rho c = 1.100 + 0,8.400.1200/3600$$

$$\begin{aligned} \text{Transmissie- en ventilatieverlies} &= (U.A + nV\rho c) \times \text{aantal graaddagen} \times 24 \text{ Wh} \\ &= (1.100 + 0,8.400.1200/3600) \times 2487 \times 24 \text{ Wh} \\ &= 12,336.10^6 \text{ Wh} = 12336 \text{ kWh} \end{aligned}$$

$$\text{Winst} = 0,8 \cdot 6.10^6 = 4,8.10^6 \text{ Wh} = 4800 \text{ kWh}$$

$$Q_{verw} = 12336 - 4800 = 7536 \text{ kWh}$$

$$\text{Verbrandingswaarde aardgas} 35.10^6 \text{ J} = 35.10^6 / 3600 = 9,7 \text{ kWh}$$

Met een ketelrendement  $\eta = 0,85$  is de verwarmingsbehoefte  $7536 / (0,85 \cdot 9,7) = 914 \text{ m}^3$  aardgas.

**Opmerking.**

Indien de binnentemperatuur vrij gelaten wordt zal, als  $\tau_{\text{eind}}$  veel groter is dan de responsietijd  $\tau_{\text{resp}}$  van de beschouwde ruimte, de totale opslag in wanden, lucht en meubilair

$\int_0^{\tau_{\text{eind}}} \left\{ (\rho c)_{\text{lu}} V + (\rho c)_{\text{w}} d_{\text{mw}} \cdot A_{\text{w}} \right\} \frac{dT_i(\tau)}{d\tau} d\tau$  gelijk aan nul zijn. De wanden etc. geven in totaal even

veel warmte *aan* de binnenlucht als zij ontvangen *van* de binnenlucht in een lange periode, omdat de binnenlucht tengevolge van de fluctuerende zonnestraling en buitenluchttemperatuur ook zal fluctueren in de tijd.

Voor woningen is de grootteorde van de responsietijd in uren te rekenen. Wanneer de energiebehoefteberekening voor een winterseizoen wordt gedaan, gaat dus de stationaire berekening toch op.