

Bijlagen niet-stationair warmtetransport

Kenniskbank Bouwfysica

Auteur: ir. A.C. van der Linden

1 APPENDIX A: Complexe functies

Rekenen met complexe getallen

$$(a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(a + bi) / (c + di) = ((ac + bd) + (bc - ad)i) / (c^2 + d^2)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ix+a} = e^a (\cos x + i \sin x)$$

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i \arctan \frac{b}{a}}$$

$$\cos(1-i)x = \cosh(l+i)x$$

$$i \sin(1-i)x = \sinh(l+i)x$$

2 APPENDIX B: Afleiding matrixmethode; module "Warmte-indringing in een eindig medium met periodieke randvoorwaarden"

De algemene oplossing van (3) in de betreffende module is:

$$T(x) = A e^{x \sqrt{\frac{i\omega}{a}}} + B e^{-x \sqrt{\frac{i\omega}{a}}}$$

Met $\sqrt{i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$ en $k = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$ gaat dit over in:

$$T(x) = A e^{(1+i)kx} + B e^{-(1+i)kx}$$

Aangezien $1+i = i(1-i)$ kan deze uitdrukking ook geschreven worden als:

$$\begin{aligned} T(x) &= A e^{i(1-i)kx} + B e^{-i(1-i)kx} \\ &= A(\cos(1-i)kx + i \sin(1-i)kx) + B(\cos(1-i)kx - i \sin(1-i)kx) \end{aligned}$$

Samennemen van overeenkomstige termen geeft:

$$T(x) = (A+B) \cos(1-i)kx + (A-B) i \sin(1-i)kx$$

Nu geldt:

$$\cos(1-i)kx = \cosh(l+i)kx$$

$$i \sin(1-i)kx = \sinh(l+i)kx$$

Hiermee wordt het plaatsafhankelijke deel van de temperatuurfluctuatie:

$$T(x) = (A+B) \cosh(l+i)kx + (A-B) \sinh(l+i)kx, \text{ ofwel:}$$

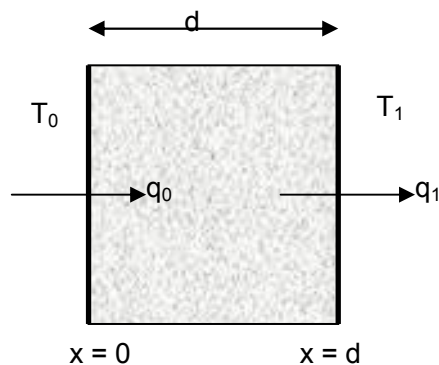
$$T(x) = P \cosh(1+i)kx + Q \sinh(1+i)kx \quad (1)$$

Uit (1) volgt de warmtestroomdichtheid $q(x)$ uit $q(x) = -\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x}$, dus:

$$q(x) = -\lambda P(1+i)k \sinh(1+i)kx - \lambda Q(1+i)k \cosh(1+i)kx \quad (2)$$

De vergelijkingen (1) en (2) bevatten nog de onbekende coëfficiënten P en Q , die berekend kunnen worden uit de aanpassing aan de randvoorwaarden. In principe is daarmee het temperatuurverloop in de constructie en het verloop van de warmtestroomdichtheid door de constructie bekend.

Beschouw nu een enkelvoudige wand als in figuur 1 gegeven is.



figuur 1.

Hierbij is:

T_0 niet-tijdafhankelijke deel van de temperatuurfluctuatie op $x = 0$

T_1 niet-tijdafhankelijke deel van de temperatuurfluctuatie op $x = d$

q_0 niet-tijdafhankelijke deel van de warmtestroomdichtheidfluctuatie op $x = 0$

q_1 niet-tijdafhankelijke deel van de warmtestroomdichtheidfluctuatie op $x = d$

Substitutie van T_0 en q_0 in (A8.1) en (A8.2) voor $x = 0$ geeft:

$$T_0 = P \quad (3)$$

$$\text{en } q_0 = -\lambda Q(1+i)k \quad (4)$$

Met behulp van (3) en (4) geldt voor $x = d$:

$$T_1 = T_0 \cosh(1+i)kd - \frac{q_0}{\lambda(1+i)k} \sinh(1+i)kd \quad (5)$$

$$\text{en } q_1 = -\lambda T_0 (1+i)k \sinh(1+i)kd + q_0 \cosh(1+i)kd \quad (6)$$

In (5) en (6) staan T_1 en q_1 uitgedrukt als functies van T_0 en q_0 . Wanneer twee van deze vier variabelen bekend zijn, kunnen de resterende twee berekend worden.

De vergelijkingen (5) en (6) kunnen ook in matrixvorm geschreven worden, namelijk:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Met:

$$a_{11} = a_{22} = \cosh(1+i)kd$$

$$a_{12} = -\frac{\sinh(1+i)kd}{\lambda(1+i)k}$$

$$a_{21} = -\lambda(1+i)k \sinh(1+i)kd$$

3 APPENDIX C: Matlabscript voor bepaling dynamisch temperatuurverloop in gelaagde constructie

```
% Constructie met n lagen met gegeven dikte d, rhoc en labda
% indien d(i)=0 dan is het een overgangsweerstand of spouw waarbij labda(i)staat voor alpha of 1/r
clear

%enkele constanten
alphae=20
alpha_i=1/0.13
rspouw=0.17
abszon=0.7

% aantal frequenties waarvoor berekening wordt gemaakt
nfreq=3;
omega(1)=0; %stationaire situatie
omega(2)=2*pi/24; %dagfluctuatie
omega(3)=pi/6; %voor de zonbelasting wordt ook de 12uurs-cyclus meegenomen

% gegeven binnen- en buitentemperatuurverloop
qzon(1)=100;
qzon(2)=140*exp(-i*12*omega(2));
qzon(3)=40*exp(-i*12*omega(3));
Te(1)=20;
Te(2)=5*exp(-i*14*omega(2));
Te(3)=0;
Tsat=Te+abszon*qzon/alphae; % Bereken de Sol Air Temperature
Ti(1)=20;
Ti(2)=4*exp(-i*17*omega(2));
Ti(3)=0;

% constructie
% Voorbeeld geïsoleerde spouwmuur
% laag 1: buitenovergangscoefficient 20
% laag 2/3: buitenblad 10cm baksteen (2*5cm)
```

```
% laag 4: spouw rsp=0,17
% laag 5/6: isolatie 10cm minerale wol (2*5cm)
% laag 7/8: binnenblad 10cm kalkzandsteen (2*5cm)
% laag 9: binnenovergangscoefficient 1/0,13

nlaag=9; %aantal constructielagen

%materiaalgegevens laag 1 t/m nlaag
d(1)=0; %eenheid m
labda(1)=alphae; %eenheid W/mK
rhoc(1)=0; %eenheid Wh/m3K

d(2)=.05;
labda(2)=1;
rhoc(2)=1600*840/3600;

d(3)=.05;
labda(3)=1;
rhoc(3)=1600*840/3600;

d(4)=0;
labda(4)=1/rspouw;
rhoc(4)=0;

d(5)=0.05;
labda(5)=.04;
rhoc(5)=40*840/3600;

d(6)=0.05;
labda(6)=.04;
rhoc(6)=40*840/3600;

d(7)=0.05;
labda(7)=1;
rhoc(7)=1600*840/3600;

d(8)=0.05;
labda(8)=1;
rhoc(8)=1600*840/3600;

d(nlaag)=0;
labda(nlaag)=alpha_i;
rhoc(nlaag)=0;

%berekening matrix m
for f=1:nfreq
for n=1:nlaag
if (d(n)==0) % spouwen en overgangswaarden
a(1,1,n,f)=1;
```

```
a(1,2,n,f)=-1/labda(n);
a(2,1,n,f)=0;
a(2,2,n,f)=1;
else
k(n)=sqrt(omega(f)/(2*labda(n)/rhoc(n)));
if(k(n)==0) % stationaire oplossing
a(1,1,n,f)=1;
a(1,2,n,f)=-d(n)/labda(n);
a(2,1,n,f)=0;
a(2,2,n,f)=1;
else %fluktuerende deel van de oplossing
a(1,1,n,f)=cosh((1+i)*k(n)*d(n));
a(1,2,n,f)=-(sinh((1+i)*k(n)*d(n))/(labda(n)*(1+i)*k(n)));
a(2,1,n,f)=-labda(n)*(1+i)*k(n)*sinh((1+i)*k(n)*d(n));
a(2,2,n,f)=a(1,1,n,f);
end
end
end
m=[1 0; 0 1];
for n=1:nlaag
m = a(:, :, n, f) * m;
end

% omvormen naar Q=ST (als beschreven in 8.2.3)

s(1,1)=-m(1,1)/m(1,2);
s(1,2)=1/m(1,2);
s(2,1)=m(2,1)-m(2,2)*m(1,1)/m(1,2);
s(2,2)=m(2,2)/m(1,2);

T(:,f)=[Tsat(f);Ti(f)];
Q(:,f)=s*T(:,f);

%temperaturen en stromen op grensvlakken berekenen
H(:,1,f)=[T(1,f);Q(1,f)];
for nl=2:nlaag+1
H(:,nl,f)=a(:, :, nl-1, f)*H(:,nl-1,f);
end

end

t=0:1:24;
hold on;

for nl=1:nlaag+1
TTOT=0;
for f=1:nfreq
TTOT=TTOT+H(1,nl,f)*exp(i*omega(f)*t);
end
```

```

TTTOT(:,nl)=TTTOT(:);
end
for nl=[1 3 6 8 10]
    plot(t,TTTOT(:,nl),'-');
end

```

4 APPENDIX D: Matlabscript voor bepaling amplitudedemping

Matlabscript voor bepaling amplitudedemping

```

%BEREKENING AMPLITUDEDEMPING EN FASEVERSCHUIVING TEN OPZICHTE VAN SOL AIR TEMPERATURE
%MATLAB script

%Voorbeeld spouwconstructie
% laag 1: buitenblad 10cm metselwerk
% laag 2: luchtspouw 3cm Rspouw=0,17
% laag 3: isolatie 9cm
% laag 4: binnenblad 10 cm beton

clear

%algemene grootheden
omega=2*pi/24; %dagfluctuatie
ri=0.13; %overgangsweerstand binnen
re=0.04; %overgangsweerstand buiten
nlaag=4 %aantal constructielagen

%materiaalgegevens laag 1 t/m nlaag
d(1)=0.1; %eenheid m
labda(1)=.8; %eenheid W/mK
rhoc(1)=1800*840/3600; %eenheid Wh/m3K

d(2)=.03;
labda(2)=.03/0.17;
rhoc(2)=1.2*1000/3600;

d(3)=.09;
labda(3)=.04;
rhoc(3)=50*1470/3600;

d(4)=.1;
labda(4)=2;
rhoc(4)=2400*840/3600;

%buitenrand
ae=[1 -re ; 0 1];

%berekening
for n=1:nlaag
k(n)=sqrt(omega/(2*labda(n)/rhoc(n)));

```

```
a(1,1,n)=cosh((1+i)*k(n)*d(n));
a(1,2,n)=- (sinh((1+i)*k(n)*d(n))/(labda(n)*(1+i)*k(n)));
a(2,1,n)=-labda(n)*(1+i)*k(n)*sinh((1+i)*k(n)*d(n));
a(2,2,n)=a(1,1,n);
end

m=ae;
for n=1:nlaag
m = a(:, :, n)* m;
end

%amplitudedamping en faseverschuiving bij qi=0
amplitudedamping1=abs(m(2,2))
faseverschuiving1=angle(m(2,2))/omega %eenheid h

%amplitudedamping en faseverschuiving bij Ti=0
hulp2=m(2,2)-m(1,2)/ri;
amplitudedamping2=abs(hulp2)
faseverschuiving2=angle(hulp2)/omega %eenheid h

=====
Berekeningsresultaat

d = 0.1000 0.0300 0.0900 0.1000

labda = 0.8000 0.1765 0.0400 2.0000

rhoc = 420.0000 0.3333 20.4167 560.0000

amplitudedamping1 = 53.4190

faseverschuiving1 = 10.6767

amplitudedamping2 = 67.2694

faseverschuiving2 = 9.0251
```