

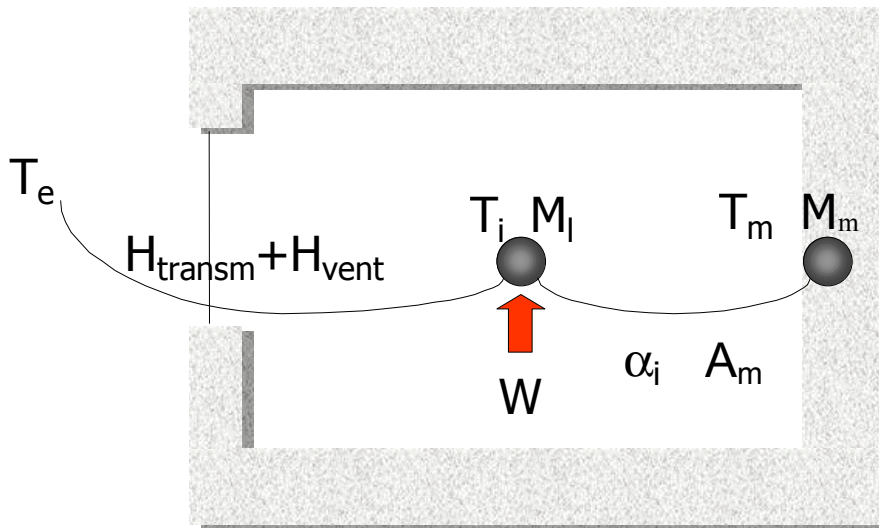
Eerste-ordemodel met periodieke randvoorwaarden

Kennisbank Bouwfysica

Auteur: ir. A.C. van der Linden

1 Inleiding

Het dynamisch thermisch gedrag van een vertrek kan worden benaderd met een eerste-ordemodel. Hier beschouwen we een eerste-ordemodel met een periodieke randvoorwaarde.



figuur 1. eerste-ordemodel van een vertrek

Hierbij is:

T_e	buitentemperatuur	[°C]
T_i	binnenluchttemperatuur	[°C]
T_m	temperatuur van de meewerkende massa van de constructies	[°C]
H_{transm}	$\sum UA =$ specifiek transmissieverlies	[W/K]
H_{ven}	$\rho c_l q_{vent} =$ specifiek ventilatieverlies	[W/K]
W	warmteproductie door zon en interne bronnen	[W]
M_l	werkzame massa van de luchtknoop	[J/K]
M_m	werkzame massa van de constructies	[J/K]
α_i	warmteoverdrachtscoefficient tussen binnenlucht en werkzame massa	[W/m²K]
A_m	oppervlakte van de meewerkende massa	[m²]

De volgende balansvergelijkingen kunnen worden opgesteld:

warmtebalans luchtknoop:

$$M_l \frac{dT_i}{dt} = W - (H_{transm} + H_{vent})(T_i - T_e) - \alpha_i A_m (T_i - T_m) \quad (1)$$

warmtebalans wandknoop:

$$M_m \frac{dT_m}{dt} = \alpha_i A_m (T_i - T_m) \quad (2)$$

Met $H = H_{trans} + H_{vent}$ en $Y = \alpha_i A_m$ kan dit in matrixnotatie worden geschreven als:

$$\begin{pmatrix} M_l & 0 \\ 0 & M_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T}_i \\ \dot{T}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H+Y & -Y \\ -Y & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W + HT_e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

of meer algemeen geformuleerd:

$$M \underline{\dot{T}} + S \underline{T} = \underline{Q} \quad (4)$$

Waarbij:

M	massamatrix
S	stijfheidsmatrix
Q	belastingvector

Het stelsel vergelijkingen uit (3) kan worden opgelost indien W en T_e als functie van de tijd bekend zijn.

2 Oplossing bij periodieke randvoorwaarden

We beschouwen de oplossing bij periodieke randvoorwaarden, waarbij in eerste instantie alleen het fluctuerende deel van de oplossing wordt bepaald. De stationaire oplossing volgt eenvoudig uit $S \underline{T} = \underline{Q}$.

De randvoorwaarden W en T_e zijn periodieke functies waarbij:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= W e^{i\omega t} = \hat{W} e^{i(\omega t + \phi_w)} \\ \tilde{T}_e &= T_e e^{i\omega t} = \hat{T}_e e^{i(\omega t + \phi_e)} \end{aligned}$$

In dit geval moeten ook de nog onbekende temperaturen T_i en T_m met een periodieke functie met dezelfde ω kunnen worden beschreven:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i &= T_i e^{i\omega t} = \hat{T}_i e^{i(\omega t + \phi_i)} \\ \tilde{T}_m &= T_m e^{i\omega t} = \hat{T}_m e^{i(\omega t + \phi_m)} \end{aligned}$$

N.B. Hierbij staat W , T_e , T_i en T_m voor het niet-tijdafhankelijke deel van de fluctuatie.

Met $\frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{d(T e^{i\omega t})}{dt} = i\omega T e^{i\omega t} = i\omega \tilde{T}$ en na deling door $e^{i\omega t}$ kan uit (2) het volgende stelsel vergelijkingen voor het niet-tijdafhankelijke deel van de fluctuatie worden afgeleid:

$$i\omega \begin{pmatrix} M_l & 0 \\ 0 & M_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H+Y & -Y \\ -Y & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W + HT_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Of:

$$\begin{pmatrix} i\omega M_l + H + Y & -Y \\ -Y & i\omega M_m + Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W + HT_e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dit is een lineair stelsel vergelijkingen met complexe variabelen.

De oplossing van (5) is:

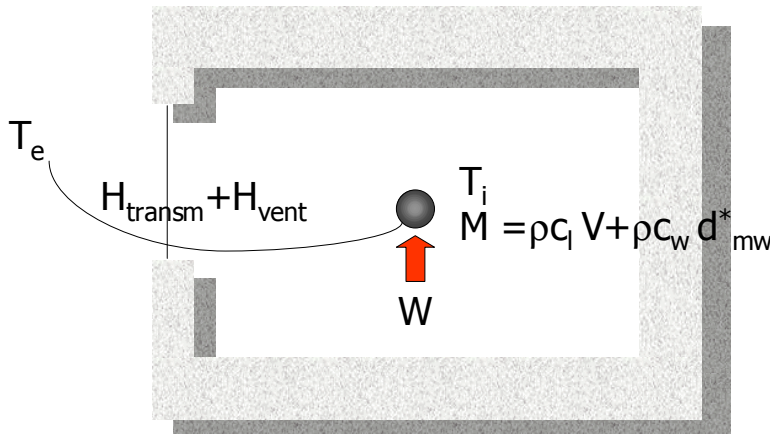
$$T_i = \frac{W + HT_e}{i\omega M_l + H + \frac{Y \cdot i\omega M_m}{Y + i\omega M_m}} \quad (6)$$

$$T_m = \frac{Y}{Y + i\omega M_m} T_i$$

3 Vereenvoudiging tot een eenknoopsmodel

Indien wordt aangenomen dat $T_m = T_l$ kan worden volstaan met een balansvergelijking:

$$(M_l + M_m) \frac{dT_i}{dt} = W - H(T_i - T_e) \quad (7)$$



figuur 2. vereenvoudigd eerste-ordemodel van een vertrek

Met $\tilde{W} = W e^{i\omega t} = \hat{W} e^{i(\omega t + \phi_w)}$, $\tilde{T}_e = T_e e^{i\omega t} = \hat{T}_e e^{i(\omega t + \phi_e)}$ en $\tilde{T}_i = T_i e^{i\omega t} = \hat{T}_i e^{i(\omega t + \phi_i)}$ volgt na deling door $e^{i\omega t}$:

$$i\omega(M_l + M_m)T_i = W - H(T_i - T_e).$$

Hieruit volgt de oplossing:

$$T_i = \frac{W + HT_e}{i\omega M_l + H + i\omega M_m} \quad (8)$$

Indien oplossing (8) wordt vergeleken met de nauwkeuriger oplossing (6) dan blijkt het verschil alleen te zitten in de factor waarmee de werkzame massa van de constructies wordt vermenigvuldigd. Dit wordt voor een deel al verdisconteerd in de meewerkende dikte van de constructies die bij een eenknoopsmodel moet worden gereduceerd met een factor T_m/T_i . Deze reductiefactor volgt uit (6):

$$\text{reductiefactor} = \left| \frac{T_m}{T_i} \right| = \left| \frac{Y}{Y + i\omega M_m} \right| = \frac{Y}{\sqrt{Y^2 + (\omega M_m)^2}} \quad (9)$$

In het volgende rekenvoorbeeld worden de twee oplossingen met elkaar vergeleken.

4 Rekenvoorbeeld

Beschouw een vertrek met afmetingen $b \cdot d \cdot h = 3,6 \cdot 5,4 \cdot 2,7 \text{ m}$. Het vertrek grenst alleen met de voorgevel aan het buitenklimaat. Het vertrek heeft een verlaagd plafond en lichte binnenwanden zodat alleen de vloer substantieel bijdraagt aan de werkzame massa.

Gegeven:

raamoppervlakte $3,5 \text{ m}^2$

U-waarde raam $2,0 \text{ W/m}^2\text{K}$

U-waarde dichte geveldelen $0,3 \text{ W/m}^2\text{K}$

ventilatievoud 2

oppervlakte van de thermische massa $3,6 \cdot 5,4 = 19,9 \text{ m}^2$

meewerkende dikte van de thermische massa $0,075 \text{ m}$

specifieke warmtecapaciteit thermische massa $\rho c = 560 \text{ Wh/m}^3\text{K}$

warmteoverdrachtscoëfficiënt tussen lucht en massa $6 \text{ W/m}^2\text{K}$

massa van meubilair e.d. gelijk aan twee maal de luchtmassa

buitentemperatuur $T_e = 15 + 5 \cos \omega(t - 14)$ met $\omega = \pi/12$ en t in [h]

zonstraling op buitengevel $q_z = 300 + 300 \cos \omega(t - 12) \text{ W/m}^2$

ZTA raam $0,2$

er zijn geen andere warmtebronnen.

Om de resultaten eenvoudiger te kunnen interpreteren, is hier de tijdseenheid h in plaats van de SI eenheid seconden aangehouden.

Gevraagd:

Het verloop van de binnentemperatuur bepaald met een tweeknoopsmodel en een eenknoopsmodel.

Uitwerking:

Binnenkomende hoeveelheid zon:

$$W(\text{tot}) = ZTA \cdot A_{\text{raam}} \cdot q_z = 210 + 210 \cos \omega(t - 12) \quad \text{W}$$

$$H_{\text{transm}} = \sum UA = 2,0 \cdot 3,5 + 0,3 \cdot (3,6 \cdot 2,7 - 2,0) = 9,3 \quad \text{W/K}$$

$$H_{\text{vent}} = npcV / 3600 = 2 \cdot 1200 \cdot (3,6 \cdot 5,4 \cdot 2,7) / 3600 = 35,0 \quad \text{W/K}$$

$$H = H_{\text{transm}} + H_{\text{vent}} = 44,3 \quad \text{W/K}$$

$$M_l = 1200 \cdot V / 3600 = 0,33 \cdot (3,6 \cdot 5,4 \cdot 2,7) = 17,5 \quad \text{Wh/K}$$

$$M_l(\text{inclusief meubilair}) = 3 \cdot 17,5 = 52,5 \quad \text{Wh/K} \quad M_m = \rho c d_{mw} A_w = 560 \cdot 0,075 \cdot 19,9 = 817 \quad \text{Wh/K}$$

$$Y_m = \alpha_i A_m = 6 \cdot 19,9 = 116,7 \quad \text{W/K}$$

Stationaire oplossing:

$$\bar{T}_i = \bar{T}_m = \bar{T}_e + \frac{\bar{W}}{H} = 15 + \frac{210}{44,3} = 19,7^\circ\text{C}$$

Fluctuerend deel van de oplossing:

Het niet-tijdafhankelijke deel van de fluctuatie in $W(\text{tot})$ en $T_e(\text{tot})$ bedraagt:

$$W = 210e^{-i\omega t} 2$$

$$T_e = 5e^{-i\omega t} 4$$

Hiermee zijn alle gegevens om de vergelijking (6) en (8) te kunnen oplossen bekend.

Uit het tweeknoopsmodel (6) volgt:

$$T_i = 19,7 + 2,8 \cos \omega(t - 14,7)$$

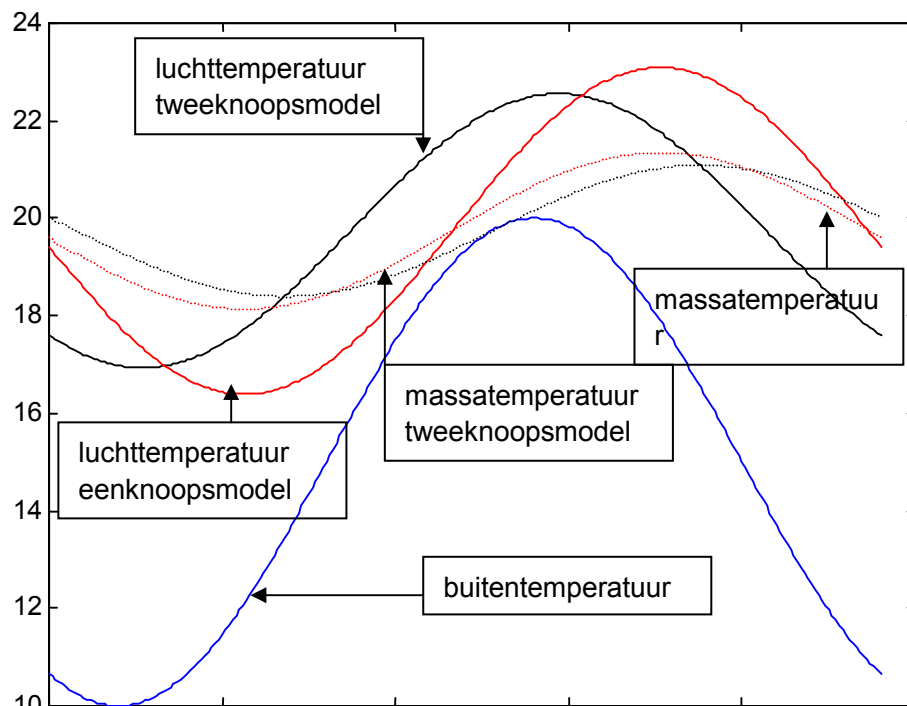
$$T_m = 19,7 + 1,3 \cos \omega(t - 18,8)$$

Uit het eenknoopsmodel (8) volgt:

$$T_i = 19,7 + 3,4 \cos \omega(t - 17,6)$$

$$T_m = 19,7 + 1,6 \cos \omega(t - 17,6)$$

In figuur 3 zijn de berekende temperaturen voor de twee modellen weergegeven. Het blijkt dat de berekende amplitude van de binnentemperatuur en de massatemperatuur niet veel verschilt, maar dat bij het eenknoopsmodel de faseverschuiving in de luchttemperatuur veel groter is. Het eenknoopsmodel is dus vooral geschikt als men alleen in de amplitude geïnteresseerd is.



figuur 3 vergelijking tweeknoops- en eenknoopsmodel