

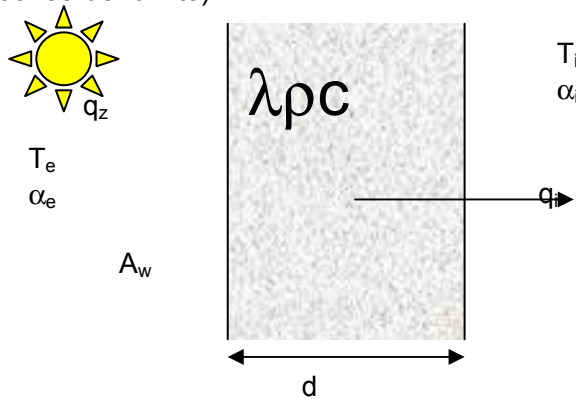
Voorbeelden warmte-indringing in een eindig medium met periodieke randvoorwaarden

Kennisbank Bouwfysica

Auteur: ir. A.C. van der Linden

1 Voorbeeld: binnendringing van zonstraling door een wand

Voorbeeld van een berekening voor een enkelvoudige wand bij periodiek variërende zonbestraling en buitentemperatuur, en constant blijvende binnentemperatuur (geconditioneerde ruimte).



figuur 1. eindige monolitische wand met zonbestraling

Gegeven:

q_z (tot) =	$400 + 400 \cos \omega(t-12) \text{ W/m}^2$
T_e (tot) =	$20 + 5 \cos \omega(t-14) \text{ }^\circ\text{C}$
ω =	$\pi/12$ en t in klokuren
T_i (tot) =	$20 \text{ }^\circ\text{C}$
λ =	$2,0 \text{ W/mK}$
ρ =	2500 kg/m^3
c =	1000 J/kgK
d =	$0,10 \text{ m}$
α_e =	$20 \text{ W/m}^2\text{K}$
α_i =	$8 \text{ W/m}^2\text{K}$
A_w =	1 (absorptiecoëfficiënt voor zonstraling van het buitenoppervlak)

Gevraagd: q_i

Oplossing:

T_a (tot) en q_z (tot) kunnen we samennemen in een Sol Air Temperature of Sonnenlufttemperatuur T_s (tot).

$$T_s(\text{tot}) = \bar{T}_s + \tilde{T}_s = \bar{T}_e + \frac{A_w \bar{q}_z}{\alpha_e} + \hat{T}_e \cos \omega(t - 14) + \frac{A_w \hat{q}_z}{\alpha_e} \cos \omega(t - 12) =$$

$$= 40 + 24,5 \cos \omega(t - 12,4)$$

Voor het fluctuerende deel van T_s (tot) kunnen we in complexe notatie nu dus ook schrijven:

$$\tilde{T}_s = \hat{T}_s e^{i\phi} e^{i\omega t} = 24,5 e^{-i12,4\omega} e^{i\omega t}$$

Het fluctuerende deel van de binnenluchttemperatuur is 0, omdat T_i (tot) constant is. Er geldt dus (zie ook de afspraak over de notatie):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha_e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_s \\ q_e \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt:

$$q_e = \frac{\alpha_e (\alpha_i a_{11} - a_{21})}{(\alpha_i a_{11} - a_{21}) - \alpha_e (\alpha_i a_{12} - a_{11})} T_s$$

$$q_i = a_{21} T_s - \left(\frac{a_{21}}{\alpha_e} - a_{11} \right) q_e \quad (1)$$

Met $k = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 2500 \cdot 1000}{12 \cdot 3600 \cdot 2 \cdot 2}} = 6,74$ en de formules uit module "Bijlagen niet-stationair warmtetransport; appendix A" worden de volgende matrixcoëfficiënten berekend:

$$a_{11} = a_{22} = \cosh(1+i)kd = 0,966 + 0,453i$$

$$a_{12} = -\frac{\sinh(1+i)kd}{\lambda(1+i)k} = -0,0496 - 0,0076i$$

$$a_{21} = -\lambda(1+i)k \sinh(1+i)kd = 2,75 - 18,01i$$

(Controleer zelf de uitkomsten met behulp van de formules uit appendix A)

Substitutie van a_{11}, a_{12} en a_{21} in (1) levert:

$$q_e = (8,27 + 5,24i)T_s = \sqrt{8,27^2 + 5,24^2} e^{i \arctan \frac{5,24}{8,27}} \cdot T_s$$

$$= 9,8e^{i0,56} \cdot 24,5e^{-i12,4\omega} = 240e^{i\omega(2,1-12,4)} \quad (\text{met } \omega = \frac{\pi}{12})$$

Zodat:

$$\tilde{q}_e = 240e^{i\omega(2,1-12,4)} e^{i\omega t} = 240e^{i\omega(t-10,3)}$$

Voor q_i wordt op dezelfde wijze gevonden:

$$\tilde{q}_i = 87e^{i\omega(t-15,4)}$$

Het stationaire, gemiddelde deel \bar{q}_i is te berekenen uit $\bar{T}_s = 40^\circ\text{C}$ en

$$R_{tot} = \frac{1}{20} + \frac{0,1}{2} + \frac{1}{8} = 0,255 \quad [m^2 K / W].$$

$$\bar{q}_i = \frac{\bar{T}_s - \bar{T}_i}{R_{tot}} = \frac{40 - 20}{0,225} = 89 \text{ W / m}^2$$

De uitdrukking voor de totale warmtestroomdichtheid is dus:

$$q_i(tot) = 89 + 87e^{i\omega(t-15,4)}$$

Met als fysische betekenis:

$$q_i(tot) = 89 + 87 \cos \omega(t - 15,4) \quad W / m^2$$

2 Voorbeeld: Dynamisch temperatuurverloop in een meerlaagse constructie

Beschouw de wandconstructie uit figuur 4 (zie module W-42; "Warmte-indringing in een eindig medium met periodieke randvoorwaarden"). In formule (8) uit diezelfde module is de matrixvergelijking van deze spouwconstructie uitgeschreven.

Gegeven:

$q_z(tot)$	$100 + 140 \cos \omega(t-12) + 40 \cos 0,5\omega(t-12) \quad W/m^2$
$T_e(tot)$	$20 + 5 \cos \omega(t-14) \quad ^\circ C$
$T_i(tot)$	$20 + 4 \cos \omega(t-17) \quad ^\circ C$
ω	$\pi/12$ en t in klokuren
A_w	0,7 (absorptiecoefficient voor zonstraling)

Voor de zonbelasting is hier ook de 12-uurs cyclus meegenomen (zie (9) module W-42; "Warmte-indringing in een eindig medium met periodieke randvoorwaarden"). Dit houdt in dat de berekening voor twee frequenties uitgevoerd moet worden (eigenlijk drie als de gemiddelde toestand worden beschouwd als $\omega = 0$).

De Sol Air Temperature kan weer op dezelfde wijze worden bepaald, zij het dat de twee frequenties worden meegenomen.

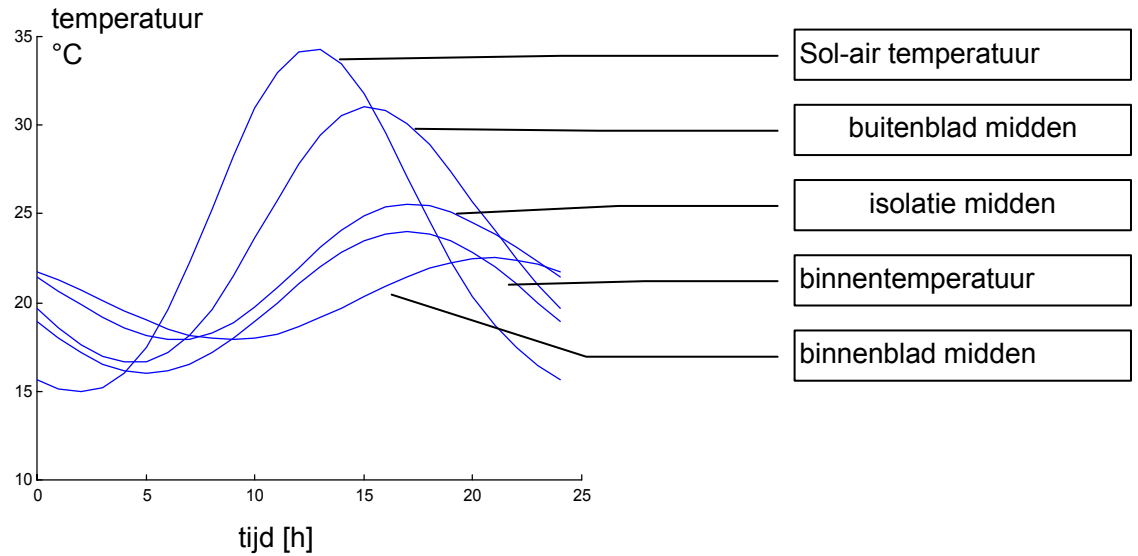
Aan weerszijden van de constructie is nu de temperatuur als randvoorwaarde gegeven. Door gebruik te maken van (11) kan de warmtestroom aan het binnen- en buitenoppervlak berekend worden. Vervolgens kan met formule (8) in alle tussenliggende lagen de temperatuur en warmtestroom berekend worden.

In appendix C (module W-45; "Bijlagen niet-stationair warmtetransport") is een Matlab-script inclusief de benodigde materiaalgegevens weergegeven waarmee deze berekening is uitgevoerd.

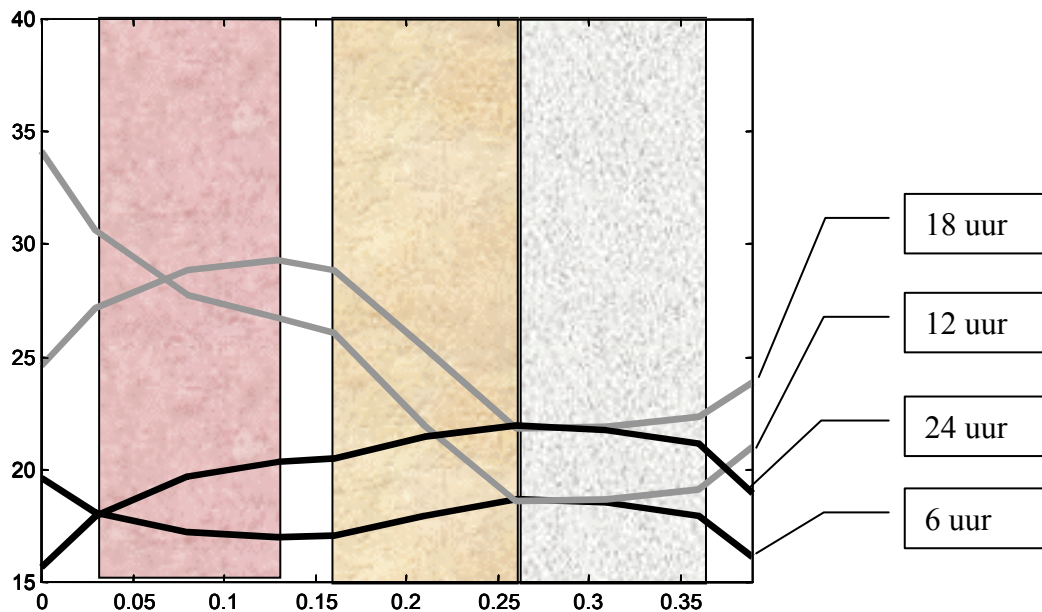
Figuur 2 geeft het temperatuurverloop over de dag op verschillende plaatsen in de constructie. Figuur 3 geeft het temperatuurprofiel in de constructie op verschillende tijdstippen.

De dagelijkse temperatuurschommeling is in het buitenblad zoals te verwachten veel groter dan in het binnenblad. In figuur 3 is duidelijk te zien dat de isolatielaag zorgt voor een demping in de amplitude.

In figuur 3 is verder te zien dat de temperatuurgradiënt in het buitenblad wisselt over de dag. In de ochtenduren is de buitenzijde warmer dan de binnenzijde, later op de dag is het omgekeerd. Indien de constructie vrij kan vervormen, zal het buitenblad in de loop van de dag van bol naar hol gaan. Indien de vervorming wordt belemmerd zullen temperatuurspanningen ontstaan.



figuur 2. dagelijks temperatuurverloop op verschillende plaatsen in een geïsoleerde spouwmuur

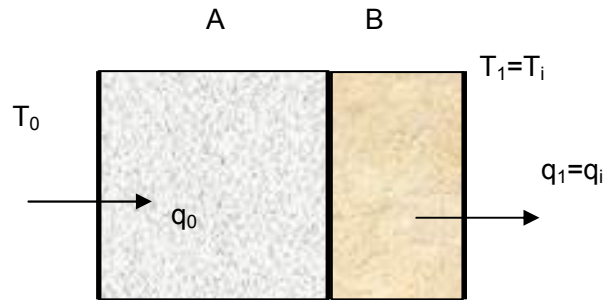


figuur 3. temperatuurverloop in een spouwmuur op verschillende tijdstippen

3 Voorbeeld: Temperatuuramplitudedemping

Ter beoordeling van het dynamisch gedrag van een constructie kan de door de wand binnenkomende warmte of de binnenoppervlaktetemperatuur van de wand als maat genomen worden. Voor de binnenoppervlaktetemperatuur wordt het begrip temperatuuramplitudedemping ingevoerd. Deze amplitudedemping geeft de verhouding aan van de temperatuuramplitude binnen ten opzichte van de temperatuuramplitude buiten en geeft de demping aan van de temperatuurschommeling buiten ten gevolge van de warmteweerstand en het accumulatievermogen van de constructie.

Voor een willekeurige constructie kan, zoals eerder behandeld, geschreven worden (zie figuur 4):



figuur 4. voorbeeld van een constructie bestaande uit meerdere lagen

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

De temperatuuramplitudedemping $D = \frac{T_0}{T_1}$ kan in twee gevallen eenvoudig berekend worden,

namelijk:

1. $q_1 = q_i = 0$, d.w.z. geen binnenkomende warmte. Hiervan is sprake als de oppervlaktetemperatuur gelijk is aan de binnenluchttemperatuur.
2. binnenluchttemperatuur T_i (tot) = constant.

Indien geen ventilatie plaatsvindt, ligt de werkelijkheid tussen deze beide gevallen in.

Ad 1.

Substitutie van $q_i = 0$ in (8.22) leidt tot:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Uitwerken levert:

$$D = \frac{T_0}{T_1} = \frac{m_{22}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \quad (3)$$

De noemer in vergelijking (3) is de determinant van de matrix M. Er kan bewezen worden dat deze altijd gelijk is aan 1, zodat:

$$D = \frac{T_0}{T_1} = m_{22} = p + iq = \sqrt{p^2 + q^2} \cdot e^{i \arctan \frac{q}{p}} = \hat{D} e^{i\phi}$$

dus $\hat{D} = \sqrt{p^2 + q^2}$ en $\phi = \arctan \frac{q}{p}$.

\hat{D} geeft de modulus van de demping weer en ϕ geeft de faseverschuiving tussen T_0 en T_1 in radialen.

Indien een dagcyclus beschouwd wordt is $\omega = \frac{\pi}{12}$ radialen per uur. Het tijdsverschil tussen de optredende maxima van T_0 en T_1 kan berekend worden uit:

$$t_0 = \frac{\phi}{\omega} = \frac{\phi \cdot 12}{\pi} \quad [h]$$

Ad 2:

$$T_i(\text{tot}) = \text{constant, dus } T_i = 0.$$

We weten dat $q_1 = q_i = \alpha_i(T_1 - T_i) = \alpha_i T_1$

Substitutie in (2) leidt tot:



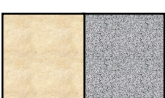

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ \alpha_i T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Uitwerken levert:

$$D = \frac{T_0}{T_1} = m_{22} - \alpha_i m_{12} \quad (4)$$

Analoog aan (3) kan hiervan de modulus \hat{D} en de faseverschuiving ϕ bepaald worden.

In tabel 1 zijn de resultaten voor een aantal constructies gegeven.

	qi=0		Ti=constant	
	D demping	ϕ/ω fase-verschuiving [h]	D demping	ϕ/ω fase-verschuiving [h]
 <p>Ts Ti</p> <p>10 cm beton</p>	1,3	3,1	1,9	2,3
 <p>10 cm isolatie</p>	1,1	2,4	23,6	0,9
 <p>5 cm isolatie + 5 cm beton</p>	11,0	6,0	17,1	3,2
 <p>5 cm beton + 5 cm isolatie</p>	1,1	2,1	13,2	1,6
 <p>10 cm isolatie + 10 cm beton</p>	43,7	7,2	55,0	5,6
 <p>10 cm beton + 10 cm isolatie</p>	1,5	5,5	31,3	4,0

tabel 1. temperatuuramplitudedemping en faseverschuiving van enkele constructies

Uit tabel 1 blijkt, dat het plaatsen van isolatie aan de buitenzijde van het beton een sterke verbetering van de amplitudedemping geeft.

In Appendix D (module W-45; "Bijlagen niet-stationair warmtetransport") is een Matlab-script gegeven waarmee de bovenstaande berekening voor een constructie met een willekeurig aantal lagen kan worden uitgevoerd.

Opmerkingen:

1. De demping kan ook genomen worden t.o.v. de Sol Air Temperature T_s . De matrix M moet

dan eerst worden vermenigvuldigd met de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1/\alpha_e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ van de fictieve luchtlaag aan

de buitenzijde. Dit is gedaan bij de voorbeelden in tabel 1.

2. De elementen van de matrix M zijn, behalve van de materiaaleigenschappen, ook afhankelijk van de hoekfrequentie. Indien de randvoorwaarde niet sinusvormig is, kan deze in een Fourierreeks ontwikkeld worden, zoals uiteengezet in module W-41; "Niet-stationair warmtetransport – periodieke randvoorwaarden". Van elke term wordt dan de responsie bepaald. Sommatie van deze responsies levert de einduitkomst.