

# Warmte-indringing in een eindig medium met periodieke randvoorwaarden

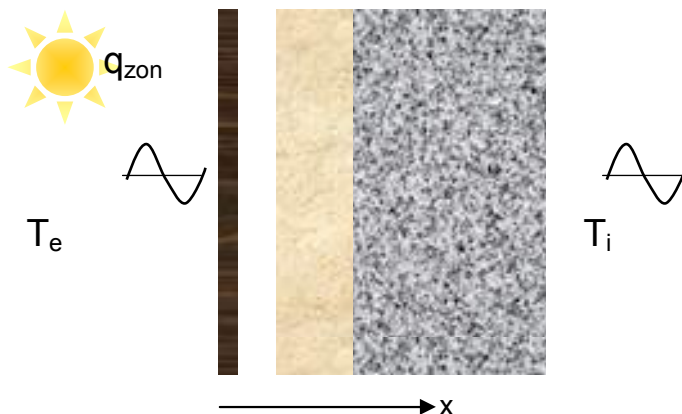
Kenniskbank Bouwfysica

Auteur: ir. A.C. van der Linden

## 1 Inleiding

In het collegedictaat Bouwfysica I van de TU Delft is de warmte-indringing in een half-oneindig homogeen medium beschouwd. Behalve bij de beschouwing van warmte-indringing in de bodem komen oneindig dikke, uit één materiaal bestaande constructies in de bouwpraktijk echter niet voor. Daken en wanden hebben immers een eindige dikte en zijn veelal opgebouwd uit meer dan één materiaal.

Hieronder zal daarom worden ingegaan op een oplossingsmethode, die gebruikt kan worden om temperaturen en warmtestromen in willekeurig opgebouwde vlakke constructies te berekenen. Omdat oplossing van de warmtetransportvergelijking voor samengestelde, eindige constructies met willekeurige randvoorwaarden doorgaans tot gecompliceerde uitdrukkingen leidt, beperken we ons tot de warmte-indringing met periodieke randvoorwaarden. Deze periodieke oplossing is uitermate geschikt om het gedrag van constructies te beoordelen bij zonbestraling.



figuur 1. samengestelde constructie met periodieke randvoorwaarden

Alvorens de oplossingsmethode te behandelen, is het goed eerst afspraken te maken over de notatie.

De totale temperatuur  $T_{tot}(x,t)$  kan gescheiden worden in een gemiddelde en fluctuerende toestand:

$$T_{tot}(x,t) = \bar{T} + \tilde{T} = \bar{T} + T e^{i\omega t} = \bar{T} + \hat{T} e^{i\phi} e^{i\omega t}$$

Waarin:

$T_{tot}(x,t)$  totale temperatuur  
 $\tilde{T}$  fluctuerende temperatuur  
 $\bar{T}$  gemiddelde temperatuur

$T$	niet-tijdafhankelijke deel
$\hat{T}$	modulus van het niet-tijdafhankelijke deel
$t$	tijd [s]
$\omega$	hoekfrequentie [rad/s]
$\phi$	faseverschuiving [rad]

Voor het variërende deel is gebruik gemaakt van de wetenschap dat een met de tijd sinusvormig verlopende temperatuur geschreven kan worden als  $\tilde{T} = T e^{i\omega t}$ , waarbij  $T$  nog een complexe functie van elke willekeurige variabele, maar niet van  $t$ , kan zijn.

Stel  $T$  is een complexe functie van  $x$ , voorgesteld door:

$$T = p(x) + iq(x) = \hat{T}(x)e^{i\phi(x)} = \hat{T}(\cos \phi + i \sin \phi),$$

Waarin:

$$\hat{T}(x) = \sqrt{p^2(x) + q^2(x)}$$

$$\phi(x) = \arctan \frac{q(x)}{p(x)}$$

Substitutie in  $\tilde{T} = T e^{i\omega t}$  leidt tot:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \hat{T}(\cos \phi + i \sin \phi) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ &= \hat{T}(\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t) + i \hat{T}(\sin \phi \cos \omega t + \cos \phi \sin \omega t) \\ &= \hat{T}(\cos(\omega t + \phi)) + i \hat{T}(\sin(\omega t + \phi)) \end{aligned}$$

De fysische betekenis van  $\tilde{T} = T e^{i\omega t}$  is dus  $\hat{T} \cos(\omega t + \phi)$

Beschouw nu weer de eendimensionale warmtetransportvergelijking (differentiaalvergelijking van Fourier):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

De fluctuerende temperatuur  $\tilde{T}$  kan geschreven worden als:

$$\tilde{T} = T e^{i\omega t} \quad (2)$$

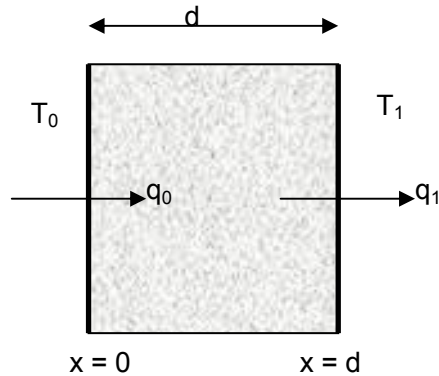
Hiermee is het plaatsafhankelijke complexe deel gescheiden van het tijdafhankelijke deel. Substitutie van (2) in (1) levert (3):

$$i\omega T(x)e^{i\omega t} = a e^{i\omega t} \frac{d^2 T(x)}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{i\omega}{a} T(x) = 0 \quad (3)$$

De algemene oplossing van (3) is:

$$T(x) = Ae^{x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}} + Be^{-x\sqrt{\frac{i\omega}{a}}}$$

Beschouw nu een enkelvoudige wand als in figuur 2 gegeven is.



figuur 2. enkelvoudige wand

Hierbij is:

- $T_0$  niet-tijdafhankelijke deel van de temperatuurfuctuatie op  $x = 0$
- $T_1$  niet-tijdafhankelijke deel van de temperatuurfuctuatie op  $x = d$
- $q_0$  niet-tijdafhankelijke deel van de warmtestroomdichtheidfluctuatie op  $x = 0$
- $q_1$  niet-tijdafhankelijke deel van de warmtestroomdichtheidfluctuatie op  $x = d$

In appendix B (module "Bijlagen niet-stationair warmtetransport") is - in matrixvorm genoteerd - de volgende relatie tussen  $T_0, T_1, q_0$  en  $q_1$  afgeleid.

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Met:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = \cosh(1+i)kd \\ a_{12} &= -\frac{\sinh(1+i)kd}{\lambda(1+i)k} \\ a_{21} &= -\lambda(1+i)k \sinh(1+i)kd \end{aligned} \tag{4}$$

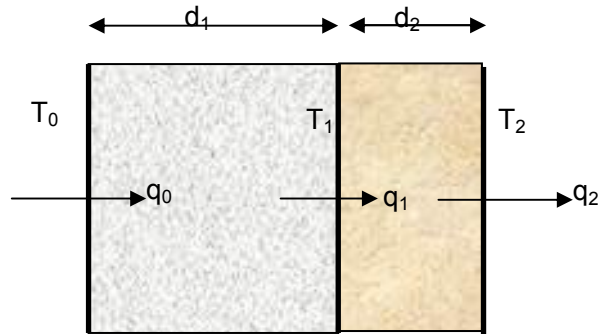
Waarbij:

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{2a}}$$

Dat  $a_{11} = a_{22}$  kan men begrijpen als men bedenkt dat verwisseling van de linker- en rechtervector uit bovenstaande matrixvergelijking bij een enkelvoudige, homogene constructie

hetzelfde resultaat moet geven met inachtneming van het teken voor de warmtestroomdichtheid.

Het voordeel van deze matrixnotatie wordt duidelijk wanneer de wand uit verscheidene lagen bestaat.



figuur 3. wand bestaande uit diverse lagen

Zo kan voor een wand uit twee lagen (zie figuur 3) het volgende opgeschreven worden:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} T_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Uit substitutie volgt:

$$\begin{pmatrix} T_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Zodat:

$$\begin{aligned} T_2 &= m_{11} T_0 + m_{12} q_0 \\ q_2 &= m_{21} T_0 + m_{22} q_0 \end{aligned}$$

Met:

$$\begin{aligned} m_{11} &= b_{11} a_{11} + b_{12} a_{21} \\ m_{12} &= b_{11} a_{12} + b_{12} a_{22} \\ m_{21} &= b_{21} a_{11} + b_{22} a_{21} \\ m_{22} &= b_{21} a_{12} + b_{22} a_{22} \end{aligned}$$

Voor de coëfficiënten  $a_{11}$  t/m  $a_{22}$  worden voor de dikte en de factor  $k$  respectievelijk  $d_1$  en  $k_1$  in de uitdrukkingen (4) ingevuld en voor de coëfficiënten  $b_{11}$  t/m  $b_{22}$  respectievelijk  $d_2$  en  $k_2$ .

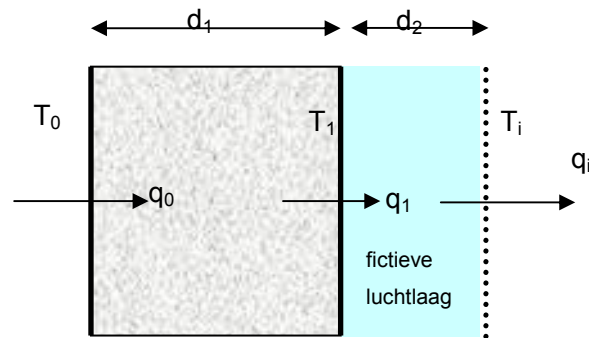
Per laag worden de matrixcoëfficiënten berekend, waarna de matrixvermenigvuldiging uitgevoerd kan worden.

Let wel:  $a_{11} = a_{22}$  en  $b_{11} = b_{22}$ , maar  $m_{11} \neq m_{22}$ .

## 2 Overgangsweerstanden en spouwweerstand

Meestal zijn niet de oppervlaktetemperaturen bekend, maar de luchttemperatuur aan beide zijden van de constructie. De warmteoverdracht van de wand via de grenslaag aan de wand naar de lucht wordt beschreven door een warmteoverdrachtscoëfficiënt  $\alpha$ , in te voeren.

Wanneer we de grenslaag als een fictieve laag voorstellen met een warmtegeleidingscoëfficiënt  $\lambda$ , een dikte  $d$  en een soortelijke warmte  $c = 0$ , volgen de matrixcoëfficiënten voor deze laag door in formules (4) de temperatuurvereffeningscoëfficiënt  $a = \lambda/\rho c$  naar oneindig, dat wil zeggen  $k$  naar nul, te laten naderen.



figuur 3. toevoeging van overgangsweerstand als fictieve luchtlaag

Zo worden  $a_{11} = a_{22} = 1$ ,  $a_{12} = -d/\lambda = -1/\alpha$  en  $a_{21} = 0$ .

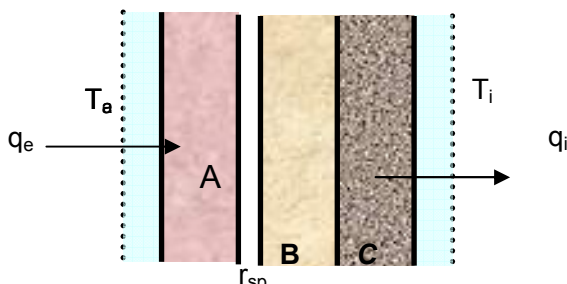
Voor de binnenzijde geldt (zie figuur 3):

$$\begin{pmatrix} T_i \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Uit (7) volgt dat  $q_i = q_1$  wat te verwachten was, omdat de fictieve laag geen warmtecapaciteit heeft. Verder volgt ook  $q_i = \alpha_i(T_1 - T_i)$ .

Op dezelfde wijze kan afgeleid worden dat voor een ongeventileerde spouw geldt:

$a_{11} = a_{22} = 1$ ,  $a_{12} = -r_{sp}$  en  $a_{21} = 0$ .



figuur 4. samengestelde wand met overgangsweerstanden

De totale uitdrukking voor een spouwconstructie (zie figuur 4) wordt dus:

$$\begin{pmatrix} T_i \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r_{sp} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha_e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_e \\ q_e \end{pmatrix} \quad (8)$$

### 3 Stationaire berekening

Over het algemeen kunnen de randvoorwaarden voor de differentiaalvergelijking van Fourier gesplitst worden in een stationaire, gemiddelde toestand en een periodiek variërend deel.

Een stationaire toestand kan opgevat worden als een periodiek fluctuerende, waarbij  $\omega$  naar nul nadert.

Voor  $\omega \rightarrow 0$ , dat wil zeggen:  $k \rightarrow 0$ , gaan de formules (4) over in  $a_{11} = a_{22} = 1$ ,  $a_{12} = -d/\lambda$  en  $a_{21} = 0$ , zodat volgens (6) nu geschreven kan worden (zie ook figuur 3):

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_2 \\ \bar{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d_2}{\lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d_1}{\lambda_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}_0 \\ \bar{q}_0 \end{pmatrix}$$

Wanneer we de matrixvermenigvuldiging uitvoeren, volgt hieruit:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_2 \\ \bar{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{d_1}{\lambda_1} - \frac{d_2}{\lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}_0 \\ \bar{q}_0 \end{pmatrix}$$

Dus ook:

$$\bar{T}_2 = \bar{T}_0 - \bar{q}_0 \left( \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right) = \bar{T}_0 - \bar{q}_0 R \quad (9)$$

$$\bar{q}_2 = \bar{q}_0 \quad (10)$$

In vergelijking (9) staat niets anders dan dat  $q = \frac{\Delta T}{R}$  terwijl (10) de triviale uitkomst geeft dat bij een stationaire toestand de warmtestroomdichtheid constant is.

### 4 Alternatieve formulering

De matrixvergelijking voor een meerlaagse wand (6)

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

kan worden herschreven tot

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Waarbij:

$$s_{11} = -\frac{m_{11}}{m_{12}} \quad (12)$$

$$s_{12} = \frac{1}{m_{12}} \quad (13)$$

$$s_{21} = m_{21} - \frac{m_{22} \cdot m_{11}}{m_{12}} \quad (14)$$

$$s_{22} = \frac{m_{22}}{m_{12}} \quad (15)$$

Deze alternatieve schrijfwijze kan worden gebruikt indien de temperaturen aan beide zijden als randvoorwaarde gegeven zijn. In module W-43; "Voorbeelden warmte-indringing in een eindig medium met periodieke randvoorwaarden" is hiervan een voorbeeld uitgewerkt.