

Niet-stationair warmtetransport – periodieke randvoorwaarden

Kenniskbank Bouwfysica

Auteur: ir. A.C. van der Linden

1 Inleiding

Bij veel van de warmtetransportproblemen waar de bouwfysica zich mee bezighoudt, doen zich periodieke randvoorwaarden voor, bij voorbeeld het verloop van de buitentemperatuur over een dag en over een jaar en het verloop van de zonbestraling over een dag. Veelal worden deze randvoorwaarden vereenvoudigd tot een sinusvormig verloop. In het onderstaande wordt aangetoond dat door middel van Fourierreeksontwikkeling met een of meer sinusfuncties elke willekeurige periodieke functie kan worden beschreven.

2 Fourierreeksontwikkeling

Een willekeurige periodieke functie $f(x)$ met een periode $2l$ kan als volgt in een Fourierreeks worden ontwikkeld [1]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right) \quad (1)$$

De termen a_0 t/m a_m en b_1 t/m b_m worden daarbij als volgt berekend:

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \quad (2)$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad (3)$$

- De term $\frac{a_0}{2}$ is gelijk aan het gemiddelde van $f(x)$.
- De periode $2l$ kan worden omgerekend naar de hoekfrequentie ω met $\omega = 2\pi/2l = \pi/l$.

De term $a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ beschrijft de m^e – harmonische en kan worden omschreven tot de volgende enkelvoudige cosinusfunctie:

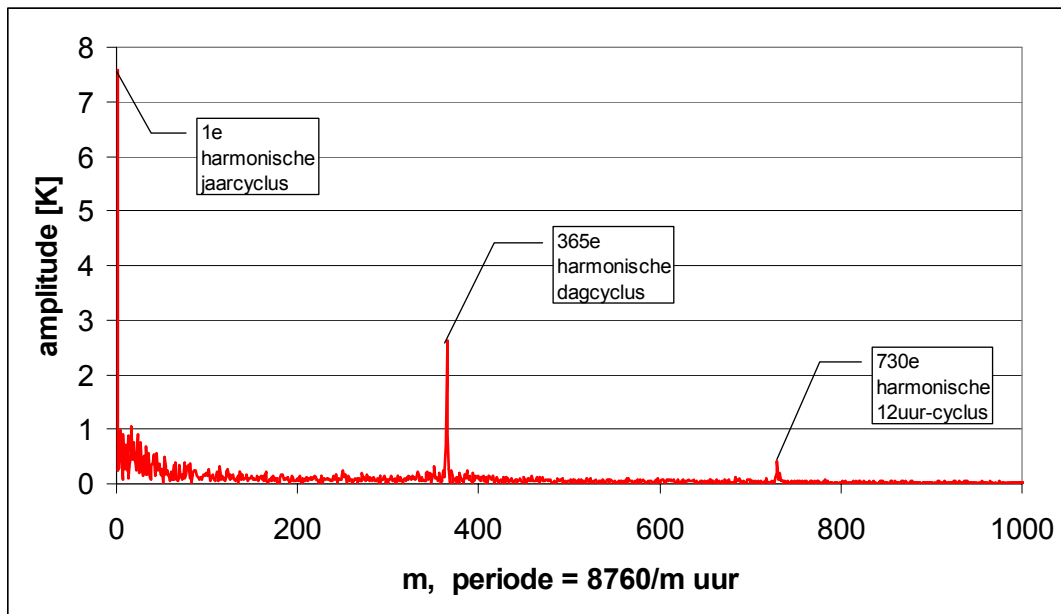
$$a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \sqrt{(a_m^2 + b_m^2)} \cos \left(\frac{m\pi x}{l} - \arctan \left(\frac{b_m}{a_m} \right) \right) \quad (4)$$

Daarbij is $\sqrt{(a_m^2 + b_m^2)}$ de amplitude en $\arctan \left(\frac{b_m}{a_m} \right)$ de faseverschuiving van de m^e -harmonische.

Hoewel in theorie het aantal harmonischen waarmee een periodieke functie wordt beschreven oneindig groot kan zijn, blijkt in de praktijk dat met een beperkt aantal harmonischen de functie voldoende nauwkeurig beschreven kan worden.

3 Voorbeeld buitentemperatuur

In figuur 1 is voor het weerstation De Bilt het resultaat van een Fourieranalyse van de buitentemperatuur weergegeven.



figuur 1. Fourieranalyse van het jaarlijks buitenluchttemperatuurverloop in De Bilt

Hieruit blijkt dat de 1^e harmonische de grootste amplitude heeft; verder heeft alleen de 365^e harmonische een significante amplitude, dit is namelijk de dagfluctuatie. De buitentemperatuur over een heel jaar kan dus goed worden benaderd met de functie:

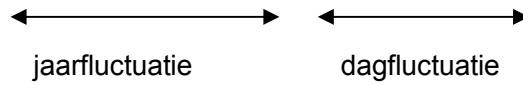
$$T = \bar{T} + \hat{T}_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{365} - \phi_1\right) + \hat{T}_{365} \cos(2\pi t - \phi_{365}) \quad (5)$$

Waarbij:

t	tijd in dagen
\bar{T}	jaargemiddelde temperatuur
\hat{T}_1	amplitude van de jaarfluctuatie
\hat{T}_{365}	amplitude van de dagfluctuatie
ϕ_1	fasehoek van de jaarfluctuatie
ϕ_{365}	fasehoek van de dagfluctuatie

Uit een Fourieranalyse van de buitentemperatuur in het gestandaardiseerde Test Reference Year (TRY) voor De Bilt komen de volgende waarden:

$$T = 9,5 + 7,6 \cos\left(\frac{2\pi t}{365} + 2,77\right) + 2,6 \cos(2\pi t + 2,30)$$

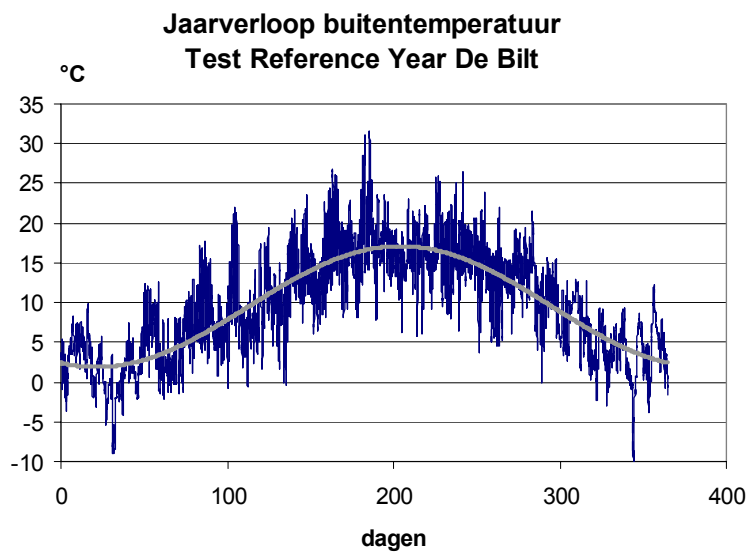


Waarbij:

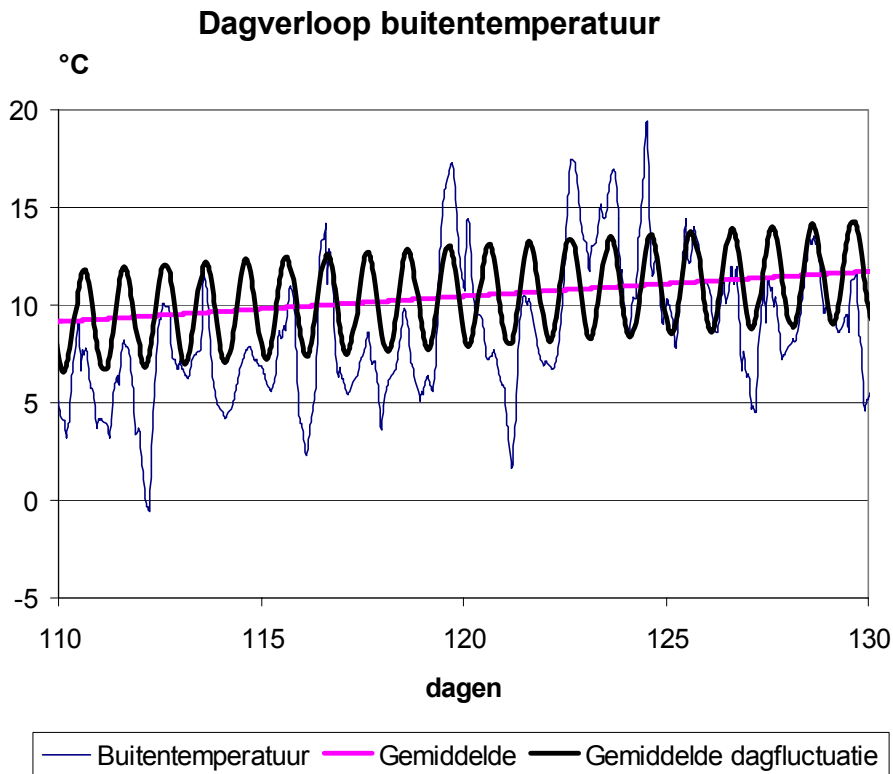
t tijd in dagen

T buitentemperatuur in °C

In figuur 2a en 2b is het verloop van de 1^e en de 365^e harmonische vergeleken met het werkelijke verloop van de buitentemperatuur over het jaar en over een aantal dagen.



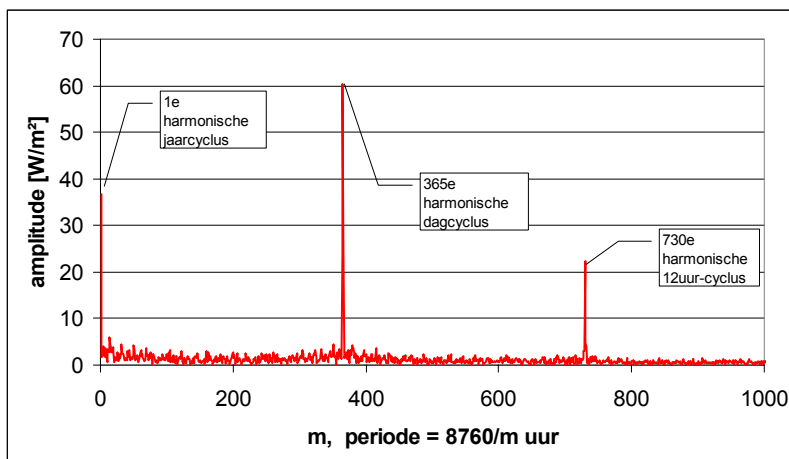
figuur 2a. vergelijking van werkelijk temperatuurverloop met 1^e-harmonische



figuur2b. vergelijking werkelijk temperatuurverloop met 1^e en 365^e harmonische

4 Voorbeeld globale zonstraling

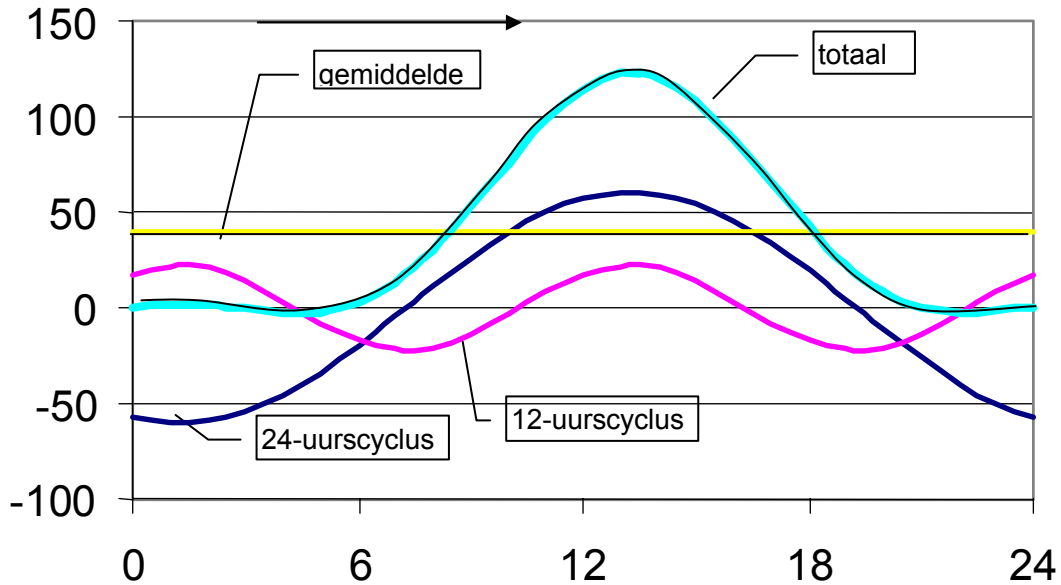
In figuur 3a is de Fourieranalyse van de globale zonstraling op een horizontaal vlak voor het Test Referentiejaar De Bilt weergegeven.



figuur 3a. Fourieranalyse globale zonstraling De Bilt

In vergelijking met de Fourieranalyse van de buitentemperatuur valt hierbij op, dat de jaarcyclus kleiner is dan de dagcyclus en dat de 12-uurscyclus significant aanwezig is. Dat laatste is verklaarbaar vanuit het feit dat de zonbelasting 's nachts altijd nul wordt. In figuur 3b

is weergegeven hoe door het toevoegen van de 12-uurscyclus dit verloop goed benaderd kan worden.



figuur 3b. dagelijks verloop van de globale zonstraling opgebouwd uit het gemiddelde, de 24-uurscyclus en de 12-uurscyclus

LITERATUUR

1. Boyce, W.E. en R.C. DiPrima, Elementary differential equations and boundary value problems, Wiley & Sons, 1976.