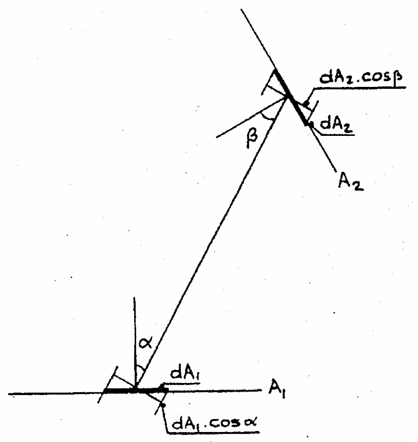
Warmteoverdracht door straling tussen bouwdelen

Kennisbank Bouwfysica
Dictaat ct4220 Bouwfysica II, TU-Delft Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen, samengesteld door prof.ir. J.J.M. Cauberg

1 Warmtestraling tussen willekeurig geplaatste, eindige vlakken

De stralingsoverdracht tussen eindige vlakken is aanzienlijk moeilijker te berekenen dan de stralingsuitwisseling tussen oneindig grote evenwijdige vlakken. Men dient hiervoor te bepalen welk deel van de door één van de vlakken uitgezonden straling daadwerkelijk op het andere terechtkomt. In figuur 1 zijn twee willekeurige vlakken getekend. Op oppervlak A_1 ligt het oppervlakte-elementje dA_1 en op oppervlak A_2 het elementje dA_2.



figuur 1. uitwisseling van stralingswarmte tussen twee willekeurige vlakjes (zwarte stralers)

De afstand tussen de elementjes is r. De hoek die de verbindingslijn tussen beide oppervlakte-elementjes maakt met de normaal op de vlakken is $\alpha = \theta_1$ respectievelijk $\beta = \theta_2$.
Analoog aan het uitzenden van licht door een lichtbron kan voor de warmtestraling bij diffuus stralende oppervlakken ook een intensiteit I en een luminantie L gedefinieerd worden:

	intensiteit I	**luminantie L**
licht	Cd = lm/sr	$Cd/m^2 = lm/(sr.m^2)$
warmte	W/sr	$W/(sr.m^2)$

tabel 1. analogie tussen licht (kortgolvige straling) en warmtestraling (langgolvige straling)

Beschouwd wordt nu de straling die wordt uitgezonden door elementje dA_1 naar dA_2; randvoorwaarde hierbij is dat de vlakken diffuus stralen en reflecteren.

Elementje dA_1 straalt per oppervlakte-eenheid een totale hoeveelheid warmte uit in de erboven liggende halfruimte die gelijk is aan:

$$P = \sigma . T_1^4 \qquad (1)$$

Met:

P	uitgestraalde energie per oppervlakte eenheid in W/m^2
σ	constante van Stefan Bolzmann = $5{,}67.10^{-8}$ in W/m^2K^4
T_1	absolute temperatuur van het oppervlak in K

Vanwege het uitgangspunt van een diffuus stralend vlak geldt ook dat P = πL. Hiermee wordt de luminantie:

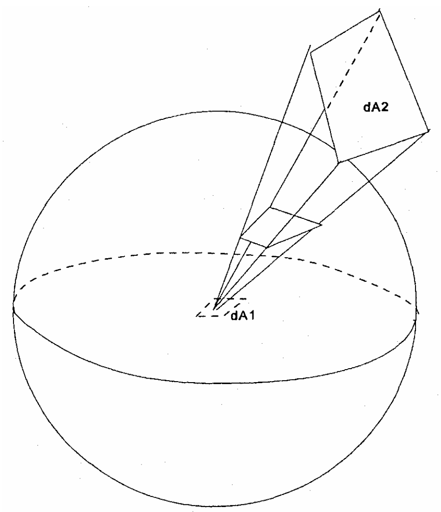
$$L = \frac{P}{\pi} = \frac{1}{\pi}\sigma.T_1^4 \qquad (2)$$

De intensiteit van de door dA_1 in de richting met hoek α uitgezonden straling volgt uit (zie ook figuur 1).

$$I_\alpha = L.dA_1.\cos\alpha \qquad (3)$$

De hoeveelheid straling van dA_1 die terechtkomt op dA_2 is de stralingsintensiteit van elementje 1, vermenigvuldigd met de ruimtehoek die door het oppervlakte-elementje dA_2 wordt omsloten gezien vanuit dA_1.

Een ruimtehoek is gedefinieerd als het deel dat uit een boloppervlak op afstand r wordt gesneden, gedeeld door deze afstand in het kwadraat. Als het oppervlakte-elementje niet in dat denkbeeldige boloppervlak ligt omdat het niet loodrecht op de straal van de bol ligt, moet het eerst op de bol worden geprojecteerd (zie figuur 2). Men moet rekenen met het “schijnbaar” aanwezige oppervlak.



figuur 2. projectie van een willekeurig vlak dA2 op een bol rond vlak dA1

dA_1 ziet het oppervlak dA_2 onder de ruimtehoek:

$$d\omega = \frac{dA_2.\cos\beta}{r^2} \qquad (4)$$

De warmtestroom van dA_1 naar dA_2 is gelijk aan:

$$dq_1 = LdA_1.\cos\alpha.d\omega = \frac{1}{\pi}.\sigma T_1^4.\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{r^2}.dA_1 dA_2 \qquad (5)$$

Op dezelfde manier is te schrijven voor de warmtestroom van vlakje dA_2 die terechtkomt op dA_1:

$$dq_2 = LdA_2.\cos\beta.d\omega = \frac{1}{\pi}.\sigma T_2^4.\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{r^2}.dA_1 dA_2 \qquad (6)$$

De netto straling van dA_1 naar dA_2 is als er geen sprake is van reflectie, dat wil zeggen als er uitgegaan wordt van zwarte stralers met $\varepsilon = 1$:

$$dq_{12} = \sigma.(T_1^4 - T_2^4).\frac{1}{\pi}.\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{r^2}.dA_1 dA_2 \qquad (7)$$

De netto warmtestroom van A_1 naar A_2 bedraagt:

$$q_{12} = \sigma.(T_1^4 - T_2^4).\frac{1}{\pi}\int\int\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{r^2}.dA_1 dA_2 \qquad (8)$$

De geometrische zichtfactor φ_{12} is gedefinieerd als:

$$A_1\varphi_{12} = \frac{1}{\pi}.\int\int\frac{\cos\alpha\cos\beta}{r^2}.dA_1 dA_2 \qquad (9)$$

Op dezelfde wijze kan men voor de straling die door A_2 wordt uitgezonden in de richting van A_1 eenzelfde formule afleiden:

$$A_2\varphi_{21} = \frac{1}{\pi}.\int\int\frac{\cos\alpha\cos\beta}{r^2}.dA_1 dA_2 \qquad (10)$$

Blijkbaar geldt:

$$A_1\varphi_{12} = A_2\varphi_{21} \qquad (11)$$

De zichtfactor φ_{12} geeft als het ware aan hoe het ene oppervlak door het andere wordt gezien.

Als alle straling van vlak 1 op vlak 2 valt, is de zichtfactor gelijk aan 1. Dat wil zeggen dat vlak 1 alleen vlak 2 “ziet”.

Deze configuratie doet zich voor als:
a. beide vlakken evenwijdig en oneindig groot zijn;
b. vlak 1 geheel door vlak 2 wordt omsloten.

In alle andere gevallen is de zichtfactor <1.
Er zijn in de literatuur voor verschillende geometrische configuraties waarden voor de zichtfactor te vinden. Zo geven figuur 3 en 4 de zichtfactor tussen twee evenwijdige vlakken

respectievelijk twee loodrecht op elkaar staande vlakken (zie ook module W-14; Het bepalen van zichtfactoren).

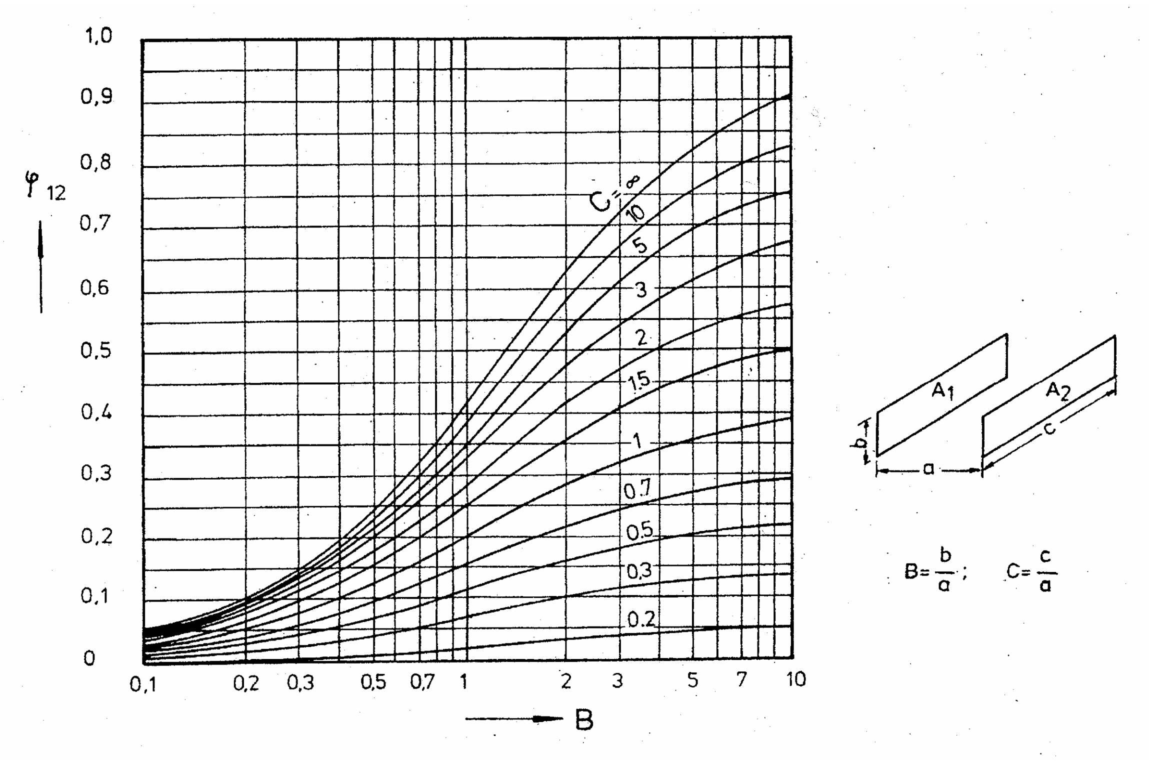
Indien niet wordt uitgegaan van zwarte stralers maar van een emissiefactor ε_1 voor het oppervlak A_1 respectievelijk ε_2 voor het oppervlak A_2 dan is de stralingsoverdracht als volgt te beschrijven: De netto stralingsoverdracht tussen de twee vlakken is het verschil tussen de hoeveelheid straling die beide vlakken van de door het andere vlak geëmitteerde straling uiteindelijk (na vele reflecties) absorberen.

De straling die vlak 1 emitteert gaat de volgende weg:

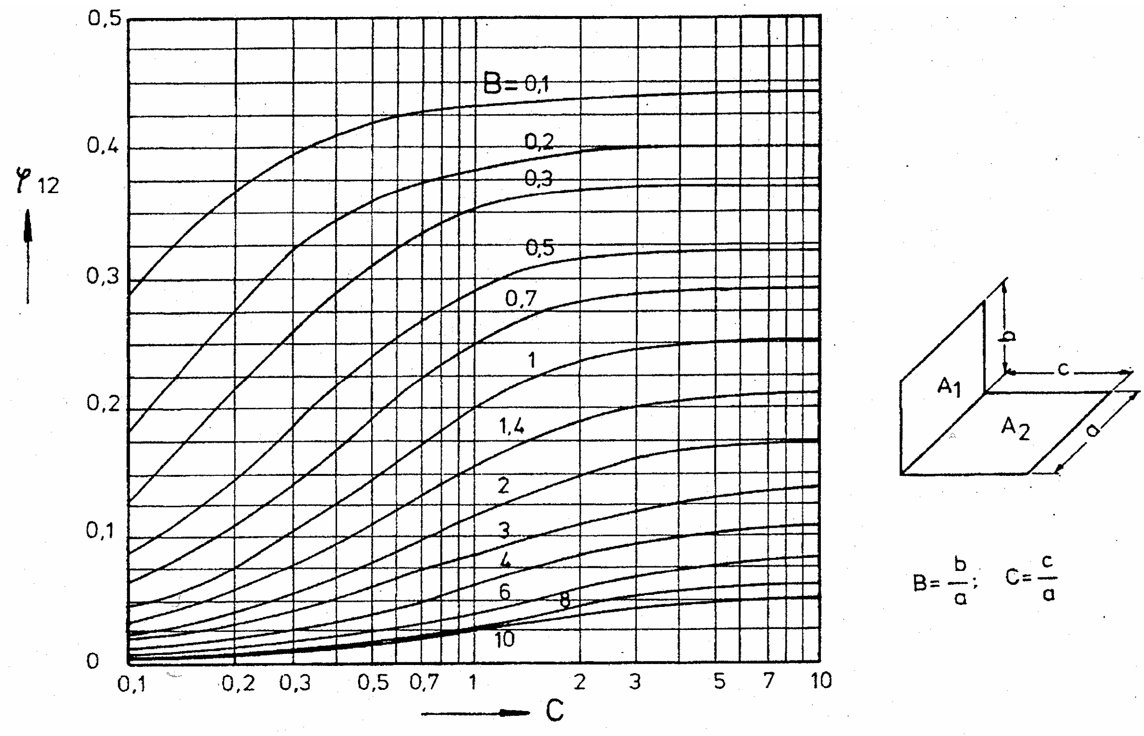
A_1 emitteert	$\varepsilon_1\, q_{sz1}.A_1$
A_2 ontvangt hiervan	$\varepsilon_1\, q_{sz1}.A_1.\phi_{12}$
A_2 reflecteert hiervan	$(\varepsilon_1\, q_{sz1}.A_1.\phi_{12}).r_2$
A_1 ontvangt hiervan	$(\varepsilon_1\, q_{sz1}.A_1.\phi_{12}).r_2\,\phi_{21}$
A_1 reflecteert hiervan in totaal	$r_1.\,(\varepsilon_1\, q_{sz1}.A_1.\phi_{12}).r_2\,\phi_{21}$
A_2 ontvangt hiervan	$r_1.\,(\varepsilon_1\, q_{sz1}.A_1.\phi_{12}).r_2\,\phi_{21}..\phi_{12}$

enz.

waarbij $q_{sz1}=\sigma T_1^4$



figuur 3. blikfactor tussen twee evenwijdige vlakken



figuur 4. blikfactor tussen twee vlakken loodrecht op elkaar

Totaal wordt door vlak A_2 de volgende straling van vlak A_1 geabsorbeerd:

$$q_{12;a} = \varepsilon_2.(\varepsilon_1 q_{sz1} A_1 \phi_{12} + \varepsilon_1 q_{sz1} A_1 \phi_{12}.r_2.\phi_{21}.r_1.\phi_{12} + ...)$$

$$= \varepsilon_1.\varepsilon_2 q_{sz1} A_1 \phi_{12}.(1 + r_2.\phi_{21}.r_1.\phi_{12} + r_2^2.\phi_{21}^2.r_1^2.\phi_{12}^2 + ...) \tag{12}$$

De uitdrukking tussen de haken in formule 12 is een oneindige reeks die kan worden gesommeerd, zodat:

$$q_{12;a} = \frac{\varepsilon_1.\varepsilon_2.q_{sz1}.A_1.\phi_{12}}{1 - r_1.r_2.\phi_{12}.\phi_{21}} \tag{13}$$

Voor de hoeveelheid die vlak 1 uiteindelijk absorbeert van de door vlak 2 geëmitteerde straling kan eenzelfde uitdrukking als (13) worden gevonden. De netto stralingsoverdracht volgt uit het verschil van deze twee:

$$q_{12} = q_{12;a} - q_{21,a}$$

Na invullen van formule (13) en r=1-ε volgt hieruit:

$$q_{12} = \frac{\varepsilon_1.\varepsilon_2 A_1.\phi_{12}}{1 - (1-\varepsilon_1).(1-\varepsilon_2).\frac{A_1}{A_2}\phi_{12}^2}.(q_{sz1} - q_{sz2}) \tag{14}$$

Waarbij:

$q_{sz1} = \sigma T_1^4$

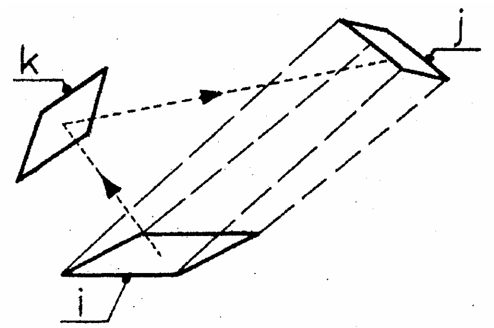
$q_{sz2} = \sigma T_2^4$

Voor de meeste bouwmaterialen geldt $\varepsilon > 0,85$. In dat geval maakt men slechts een beperkte fout als de formule (14) vereenvoudigd wordt tot:

$$q_{12} = \varepsilon_1.\varepsilon_2.A_1.\phi_{12}.(q_{sz1} - q_{sz2}) \qquad (15)$$

2 Stralingsoverdracht in een ruimte

Formules (14) en (15) gelden alleen als er geen andere reflecterende wanden (globaal met $\varepsilon < 0,5$) aanwezig zijn. Als dit wel het geval is, zal een deel van de door vlak A_1 uitgezonden straling ook via reflectie tegen andere wanden op A_2 terechtkomen (zie figuur 5). De invloed kan normaliter beperkt worden tot het in rekening brengen van de eerste reflectie.



figuur 5. stralingsuitwisseling via reflectie tegen een derde wand

Beschouw nu weer de twee platte vlakken 1 en 2 en een willekeurig plat vlak k met een reflectiefactor r_k:

Vlak 2 absorbeert nu totaal van vlak 1:

$$q_{12;a} = \varepsilon_1.q_{sz1}A_1.\phi_{12}.\varepsilon_2 + \varepsilon_1.q_{sz1}.A_1.\phi_{1k}r_k\phi_{k2}\varepsilon_2 \qquad (16)$$

Voor n-vlakken wordt dit:

$$q_{12;a} = \varepsilon_1.\varepsilon_2.q_{sz1}.(A_1\phi_{12} + \sum_{k=3}^{n} A_1\phi_{1k}r_k\phi_{k2}) \qquad (17)$$

De sommatieterm bevat (n-2) termen omdat bij platte vlakken voor k=1 en k=2 de termen ϕ_{11} en ϕ_{22} gelijk aan nul worden. Omgekeerd absorbeert vlak 1 van vlak 2 totaal:

$$q_{21;a} = \varepsilon_2.\varepsilon_1.q_{sz2}.(A_2\phi_{21} + \sum_{k=3}^{n} A_2\phi_{2k}r_k\phi_{k1}) \qquad (18)$$

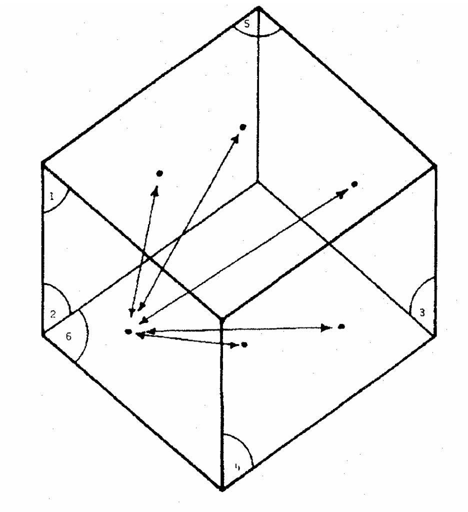
Verder geldt formule (11) nog steeds, zodat de sommatie-termen in de formules (17) en (18) aan elkaar gelijk zijn. Daarmee wordt de uiteindelijke netto straling van vlak 1 naar vlak 2:

$$q_{12} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (A_1 \phi_{12} + \sum_{k=}^{n} A_2 \phi_{1k} r_k \phi_{k2})(q_{sz,1} - q_{sz2}) \qquad (19)$$

of algemeen gesteld:

$$q_{ij} = \varepsilon_i . \varepsilon_j .(A_i . \phi_{ij} + \sum_{k=1}^{n} A_i . \phi_{ik} r_k \phi_{kj}).(q_{szi} - q_{szj}) \qquad (20)$$

In het geval van zwarte stralers behoeft geen rekening te worden gehouden met straling die via andere vlakken dan de twee beschouwde wordt gereflecteerd en kan volstaan worden met de stralingsuitwisseling tussen alle wanden onderling, twee aan twee te beschouwen (zie figuur 6).



figuur 6. uitwisseling van straling van vlak i met de overige vlakken in een vertrek

Als een vlak volledig door een vlak wordt omsloten, bij voorbeeld zoals bij twee concentrische bolvormige die “alleen elkaar zien”, is de zichtfactor ϕ = 1. Hetzelfde geldt voor de twee oneindig grote, evenwijdige vlakken. Bij een vlak dat volledig door een aantal andere vlakken wordt omsloten, zoals een van de wanden van een vertrek, is de som van de zichtfactoren van dit vlak naar de omsluitende vlakken gelijk aan:

$$\sum \phi_{ij} = 1 \qquad (21)$$

Voor het in figuur 6 getekende voorbeeld geldt:

$$\phi_{12} + \phi_{13} + \phi_{14} + \phi_{15} + \phi_{16} = 1 \qquad (22)$$