Warmteoverdracht door geleiding

Kennisbank Bouwfysica
Auteur: ir. E.H. Tumbuan, prof.ir. J.J.M. Cauberg, Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen, TU-Delft

1 Inleiding

Wanneer een constructie door de zon wordt bestraald en/of als er een temperatuurverschil over een constructie aanwezig is, zal er naar en door de constructie warmtetransport optreden. Om enig inzicht te krijgen in het mechanisme van het warmtetransport door een constructie en van een constructie naar zijn omgeving zullen eerst de verschillende manieren worden behandeld hoe warmtetransport kan plaatshebben, namelijk door:
- geleiding;
- convectie;
- straling.

2 Warmteoverdracht door geleiding

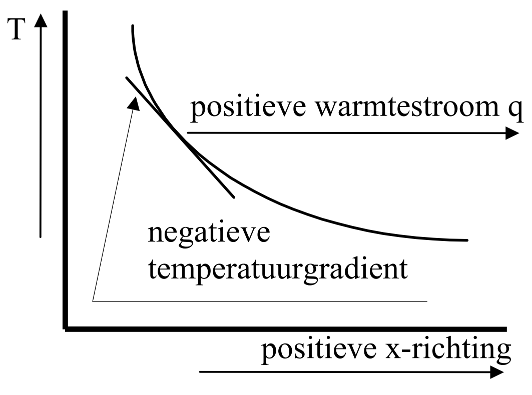
Volgens Fourier kan voor de warmtestroomdichtheid q geschreven worden als:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Waarin:

λ	warmtegeleidingscoëfficiënt in [W/mK]
$\frac{\partial T}{\partial x}$	temperatuurgradiënt in [K/m]
q	warmtestroomdichtheid in [W/m^2]

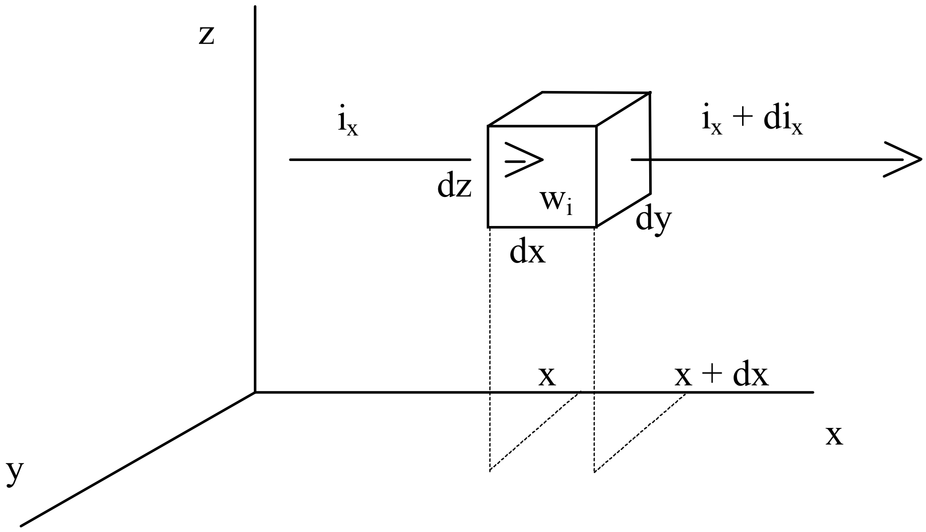
Warmte stroomt van een hoge naar een lage temperatuur, dus bij een negatieve temperatuurgradiënt ontstaat een positieve warmtestroomdichtheid in de positieve x-richting door het minteken in de definitie op te nemen (zie figuur 1).



figuur 1. positieve warmtestroom bij negatieve temperatuurgradiënt

Het temperatuurverloop in een vast medium zal over het algemeen van plaats tot plaats verschillen en variëren in de tijd. Om genoemd temperatuurverloop te kunnen berekenen, wordt eerst de differentiaalvergelijking afgeleid, die het warmtetransport beschrijft.

Beschouw hiervoor een klein volume-element dx.dy.dz. in figuur 2:



figuur 2. warmtebalans in x-richting bij een elementair volume deeltje

Wanneer de wet van behoud van energie op dit elementje wordt toegepast, dan luidt de energiebalans in woorden:

De verandering van de warmte-inhoud van een volume-element per tijdseenheid =
de netto toevoerstroom van warmte door geleiding +
de warmteproductie per tijdseenheid in het element. (1)

De verandering van de warmte-inhoud kan worden geschreven als $\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dx.dy.dz$, waarin de dichtheid ρ in [kg/m^3] en de soortelijke warmte c in [J/kgK] zijn. We beperken ons tot materialen met constante dichtheid en soortelijke warmte.

De netto-toevoerstroom van warmte door geleiding is het verschil in warmtetoevoer en warmteafvoer door de begrenzingen van het volume-element.
Door het linkervlak van het volume-element (zie figuur 1) wordt een hoeveelheid warmte toegevoerd: $i_x = q dy.dz = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy.dz [W]$, terwijl door het rechter zijvlak wordt afgevoerd: $i_{x+dx} = i_x + di_x = i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right) dy.dz$

De netto-toevoerstroom is het verschil $di_x = i_x - i_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx.dy.dz$

Voor de y- en z-richting kunnen voor de netto-toevoer analoge uitdrukkingen worden verkregen.

Als de warmteproductie per tijdseenheid en per eenheid van volume w_i [W/ m^3] wordt genoemd, dan bedraagt de warmteproductie per tijdseenheid in het element: w_i dx.dy.dz [W].

De verkregen termen ingevuld in de vergelijking in woorden (1) en na deling door dx.dy.dz levert de complete partiële differentiaalvergelijking voor de niet-stationaire warmtegeleiding in een vast medium met eventuele warmteproductie:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + w_i \qquad (2)$$

Indien w_i =0 en λ constant mag worden verondersteld, vereenvoudigt de formule (2) zich tot:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad \text{of}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \qquad (2a)$$

Formule (2a) wordt de “differentiaalvergelijking van Fourier” genoemd.

3 Temperatuurvereffeningscoëfficiënt

De grootheid a uit (2a) wordt de temperatuurvereffeningscoëfficiënt of thermische diffusieteit genoemd.

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad [m^2/s]$$

Waarin:

λ	warmtegeleidingscoëfficiënt in W/mK
ρ	dichtheid in kg/m3
c	soortelijke warmte in J/kgK

De temperatuurvereffeningscoëfficiënt is een maat voor de verhouding tussen de grootte van de warmtegeleiding en de grootte van de energieopslag en geeft zodoende weer hoe goed of hoe slecht de temperatuur in het materiaal wordt vereffend.
Voor aluminium en hout zijn de temperatuurvereffeningscoëfficiënten respectievelijk circa 9.10^{-5} en 1.10^{-7}.

Een houten steel van een pan zal dus minder snel warm worden dan een aluminium steel.

In deze module zullen ééndimensionale warmtetransporten worden beschouwd.
De differentiaalvergelijking wordt dan:

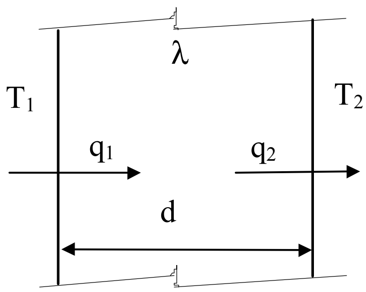
$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (2b)$$

Wanneer ook nog de toestand stationair, dus tijdonafhankelijk, wordt verondersteld, dan wordt verkregen $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$, zodat $\frac{dT}{dx} =$ constant.

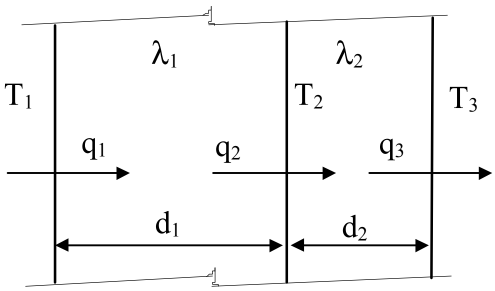
Het temperatuurverloop in stationaire toestand verloopt dus lineair in de plaats en de warmtestroomdichtheid $q = -\lambda \dfrac{dT}{dx}$ heeft - omdat er geen warmtebronnen aanwezig zijn - overal dezelfde waarde.

4 Warmteweerstand

In onderstaande figuur 3 is een materiaal gegeven met een dikte d.



figuur 3. monolithische wand



figuur 4. samengestelde wand

Met oppervlaktetemperaturen T_1 en T_2 en de eis dat de warmtestroomdichtheid constant moet zijn, dus $q_1 = q_2$ volgt :

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{d} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} = \frac{T_1 - T_2}{R} \quad \text{[W/m²]}$$

waarin met R, in analogie met de elektriciteitsleer, de warmteweerstand van een materiaal met dikte d wordt ingevoerd:

$$R = \frac{d}{\lambda} \text{ [m²K/W]}$$

In figuur 4 is een constructie geschetst bestaande uit twee verschillende materialen.
Ook hier geldt $q_1 = q_2 = q_3 = q$, zodat:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$

In stationaire toestand mogen bij een samengestelde constructie de warmteweerstanden worden opgeteld, $q = \dfrac{\Delta T}{\Sigma R}$.

De volgende tabel geeft ter illustratie de grootte orde van warmtestroomdichtheden van een geïsoleerde en ongeïsoleerde betonconstructie bij een temperatuurverschil van 15 K over de randen.

	d [m]	**λ [SI]**	**R [SI]**	**q [W/m^2]**
beton	0,20	2,0	0,1	150,0
isolatie	0,08	0,04	2,0	7,5
beton + isolatie	0,28		2,1	7,1

tabel 1. invloed van isolatie op warmtestroom door een betonnen wand

De warmtestroomdichtheid van de geïsoleerde constructie wordt in hoofdzaak bepaald door de warmteweerstand van de isolatie.